目　　录

第18章 球　面

除了空间以外，球面是欧氏仿射空间中最简单的图形，因此在数学上和实际应用(如航海学、天文学和机械学)中，很自然到处都要遇到球面。在这一章中，我们要给出有关球面性质的多种多样的例子。我们多次用到了超出本书的初等范围的概念：积分、微分几何等等，以期由此激发起读者的兴趣，去了解这些理论的进一步阐述。本章中的结果，有些是初等的，有些比较复杂，但在我看来除了18.8和18.10两节的结果以外，所有的结果都是自然的、直观的，而那两节的结果则能帮助读者有效地将视野扩展到维数1，2，3以外。与第10章不同的是，所有的结果都只与球面本身有关，而与外围空间无关。

18.1节讨论了一些实际问题，如球径计和图；数学家则会遇到球极投影，它在后面将起主要作用。18.2节自由地运用代数拓扑的概念，在球面上不加证明地得出了一些很细致的结果，我认为如若不用这些简洁而精巧的概念，要讨论球面是很困难的。

在18.3节中，我们将球面看作微分流形，这一结构使我们能很容易地构造出球面的规范测度，对 S^2 而言这就是地球上的测度。一个关键的公式是 Girard 公式，即球面三角形的面积等于内角之和减去 π。18.4节定义了球面 S^d 上的内蕴距离，它定义为两点间最短道路的长度，而不是没有实际意义的 $\mathbf{R}^{d+1}$ 的诱导距离；我们在球面 S^d 上研究一点到另一点的最短道路，有时这是一个实际问题。为了能利用内蕴距离进行计算，或者说为了在天文学中计算角度，我们需要球面三角形的有关公式。在18.6节中给出了相当完备的公式表，并讨论了这些公式的实际应用。

这一章的最后部分，又回到了数学味更浓的讨论。先是在18.7节中，我们证明了 Cauchy 的一个精巧的引理，它是12.8节中

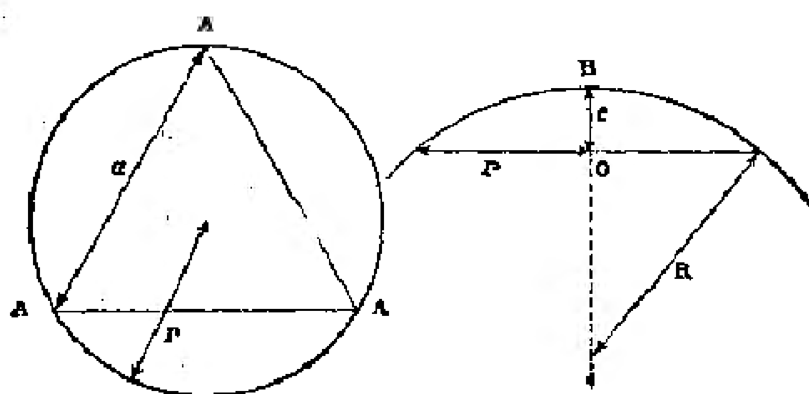
凸多面体刚性定理的证明的关键。随后，18.8 节是对 S^3 的几何学的很细致的讨论，这种细致的讨论，对于了解 S^3 球面和 Hopf 纤维化的直观形象是很有裨益的。事实上，S^3 的这一构造是一种更一般构造的最简单的情况，在几何和微分拓扑中我们随处会遇见这种构造，在代数拓扑中也是如此。通过球极投影，我们可从 S^3 的性质推出 $\mathbf{R}^3$ 的旋转环面的一些证明并不显豁但很直观的性质。

18.10 节引入的 Möbius 群，可能会使读者感到很突兀，觉得不自然。实际上，这个群是第 19 章讨论双曲几何的一半篇幅以及整个第 20 章的基础。在18.10 节中，我们研究了这个群在 S^d 上的自然作用，这个作用除了其固有的几何上的趣味之外，还是很多新近结果的基本工具。

在整个这一章中，$S=S^d$ 表示欧氏空间 $\mathbf{R}^{d+1}$ 的单位球面。

18.1 定义，特殊维数，图和射影

18.1.1 初注；球径计。 具有相同维数的欧氏空间中的所有球面都是彼此相似的，这就是为什么在这一章中我们仅仅研究标准欧氏空间 $\mathbf{R}^{d+1}$ 的标准球面 $S=S^d$ 的缘故。要将本章的结果和公式推广到任意给定半径的球面上去是很容易的。



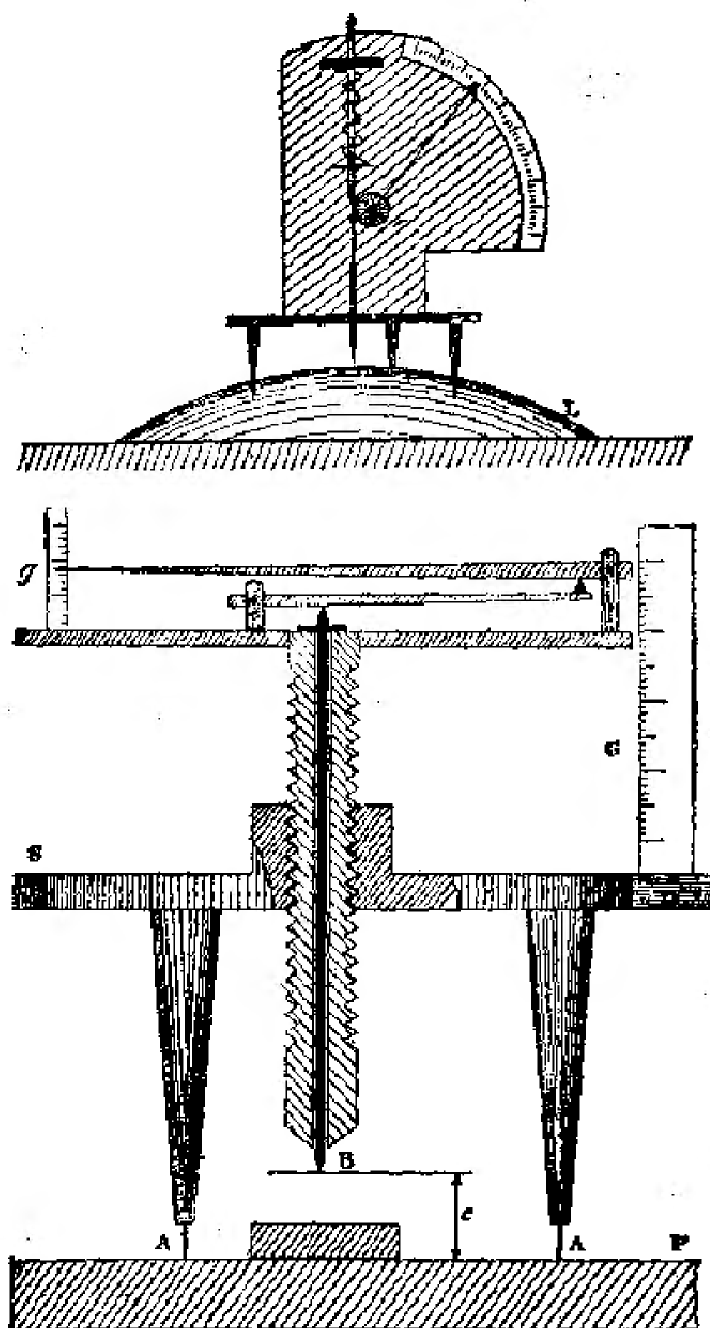
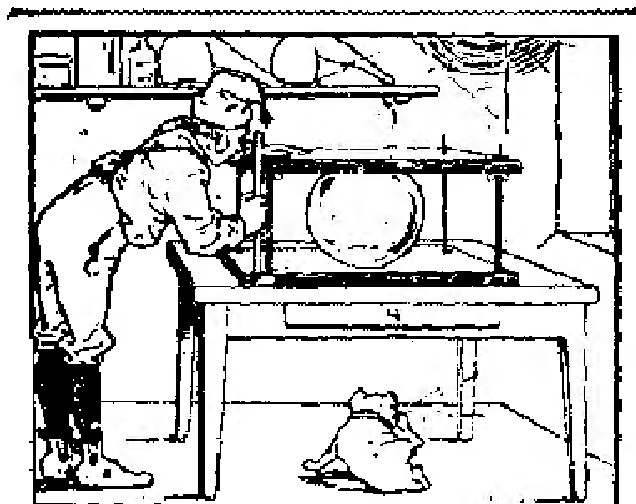


图 18.1.1.

H. Bouasse,《测量仪器》, Delagrave, 1917.

我们先来谈一个实际问题，即要求出一个"实心"球(例如钢球或光学透镜的曲面)的半径，为此我们利用球径计(图 18.1.1)。如果底面的等边三角形具有相等公共长度 a 的边，且浮针到底部平面的距离为 c，则所求半径等于 $R=(a^2+3c^2)/6c$。球径计的另一模型如图 18.1.2 所示。

巧匠 Cosinus.



Cosinus 测量球体的直径精确到 3 至 4 厘米. 他量得的直径等于 0.30 米. 只有在他觉得无兴趣操作时,才量得精确度不很高的扁球体.

图 18.1.2.

Christophe, «巧匠 Cosinus 的执着想法», Armand Colin.

18.1.2 定义

18.1.2.1 S 与 $\mathbf{R}^{d+1}$ 的 $k+1$ 维向量子空间的交称为 S 的子球面(k 维子球面). 若 $k=1$, 往往就称为大圆. 若 x, $y\in S$, 且 $y\neq\pm x$, 则存在包含 x 和 y 的唯一大圆.

18.1.2.2 S 与 $\mathbf{R}^{d+1}$ 的 $k+1$ 维仿射子空间的交称为 S 的小球面(k 维小球面). 对 S^2, 我们称之为 S 的圆(或小圆).

18.1.2.3 S 的北极是点 $n=(0,\cdots,0,1)$, 南极是点 $s=(0,\cdots,0,-1)$, 赤道是 S^d 与 $\mathbf{R}^{d+1}$ 的超平面 $x_{d+1}=0$ 交成的 $d-1$ 维子球面.

18.1.2.4 S^d 在 x 处的切超平面, 或者是 $\mathbf{R}^{d+1}$ 的向量子空间 $x^\perp$, 或者是通过 x 且沿方向 $x^\perp$ 的仿射超平面, 我们将它记为 T_xS (参看 10.7.4 和 18.3.2). 它的元素称为 S 在 x 处的切向量. 同一点 x 处的两个非零切向量的夹角定义为 8.6.3 的角, 这个角属于 $[0,\pi]$.

18.1.2.5 S 的自然拓扑是由 $\mathbf{R}^{d+1}$ 诱导的拓扑, 我们不考虑

其他的拓扑。

18.1.3 特殊维数

18.1.3.1 维数 1. 关于圆 S^1，我们已经看到它可解释为模是 1 的复数全体所成的乘法群，或 $\mathbf{R}^2$ 的旋转群（参看 8.3）。但它也可以看作 1 维的实射影空间（参看 4.3.6，图 8.7.7.6 和 18.1.4.5）。S^1 赋有一个固有的度量，参看 9.9.8 和 18.4。

18.1.3.2 维数 2. 从物理上来说，这就是我们所在的行星。就数学上而言，它的基本性质之一是它是一个 Riemann 球面，代表添加了∞点的复数域 $\mathbf{C}$：$S^2 \simeq \mathbf{C} \cup \infty$，其中不仅涉及 $\mathbf{C}$ 中的 Alexandrov 紧化，而且涉及一种将全纯函数、亚纯函数等概念推广的做法；见 [CH 2] p. 90。由于我们将在 18.10 中对所有 d 详细地讨论 S^d 的共形变换群，我们将不再更多地强调 S^2 从 $\mathbf{C}$ 所继承的结构。等同关系 $S^2 \simeq \mathbf{C} \cup \infty$ 可从 18.1.4.5 得到，这也是 S^2 与一维复射影空间之间的同构，参看 4.3.6。

18.1.3.3 维数 3. 球面 S^3 曾被解释为模等于 1 的四元数全体所成的乘法群，关于这一点可见 8.9.1 的附注。我们将在 18.8 中详细地研究 S^3。

18.1.3.4 维数 4. 球面 S^4 与四元数体上的一维射影空间是恒同的，参看 4.9.7。

18.1.3.5 维数 6, 7, 15. 由于 Cayley 八元数代数的存在性，这些维数具有一些特殊性质（参看 [PO]，p. 278 和 [BES]，第 3 章）。S^7 几乎是一个群，它与模为 1 的八元数全体等同，而 S_6 则与模为 1 的纯八元数全体等同。八元数射影平面可导致纤维为 S^7 的纤维化 $S^{15} \to S^8$，它是纤维为 S^1 的 Hopf 纤维化 $S^3 \to S^2$ 的推广，参看下一小节和 18.8.7。

18.1.3.6 Hopf 纤维化. Hopf 纤维化是对除 S^{15} 以外的球面 S^{2n+1} 和 S^{4n+3} 所定义的；所谓**纤维化**就是指映射

$$\begin{array}{ccc} S^{2n+1} & & S^{4n+3} \\ S^1 \big\downarrow & & S^3 \big\downarrow \\ P^n(\mathbf{C}) & & P^n(\mathbf{H}) \end{array},$$

它的像是复射影空间 $P^n(\mathbf{C})$ 或四元数射影空间 $P^n(\mathbf{H})$（参看 4.8）。置于竖直箭头旁边的 $S^1(S^3)$ 意指像集每一点的逆像是同胚于 $S^1(S^3)$ 的；这些映射并不是很奥妙的，对 $\mathbf{C}$ 的情形而言，它只不过是 4.3.3.2 中用到的映射 $p:S\to P(E)$，见 18.11.30。

18.1.4 球极投影

18.1.4.1 **S^d 在 $\mathbf{R}^d$ 上的北极球极投影定义如下：**我们按通常习惯将 $\mathbf{R}^{d+1}$ 与 $\mathbf{R}^d\times\mathbf{R}$ 等同，并将每个 $m\in S^d\setminus n$ 映到 $\mathbf{R}^d$ 的点 $f(m)$ 使得 $m, n, f(m)$ 共线。下面的计算表明 f 是双射，且逆映射 f^{-1} 作为映射 $\mathbf{R}^d\to S^d$ 是 C^∞ 类的。我们将 $m\in\mathbf{R}^{d+1}$ 看作为一个对 (z, t)，$z\in\mathbf{R}^d$，$t\in\mathbf{R}$；于是可选取 $\lambda\in\mathbf{R}$ 使 $f(m)=\lambda n+(1-\lambda)m$，且 $f(m)\in\mathbf{R}^d$，其中 $\lambda=t/(t-1)$，且

18.1.4.2

$$f:m=(z, t)\longmapsto\frac{1}{1-t}z,$$

$$f^{-1}:z\longmapsto\left(\frac{2z}{\|z\|^2+1}, \frac{\|z\|^2-1}{\|z\|^2+1}\right).$$

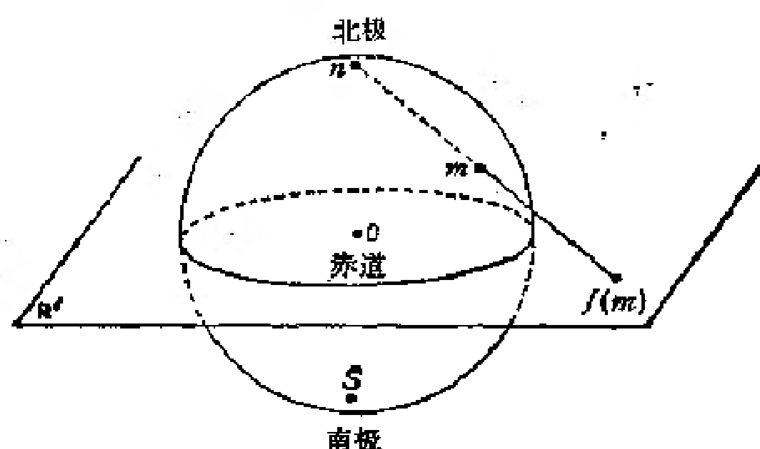


图 18.1.4.1.

18.1.4.3 更一般地我们把每一个映射 $f:S\setminus m\to H$ 都称为 S 的球极投影，其中 m 是 S 的点，H 是平行于 S 在 m 处切超平面且异于它的一个超平面。根据 10.8.2 可知，上述映射 f 是 $\mathbf{R}^{d+1}$ 的关于极点 m 的反演变换在 S 上的限制，特别是所有的球极投影都保

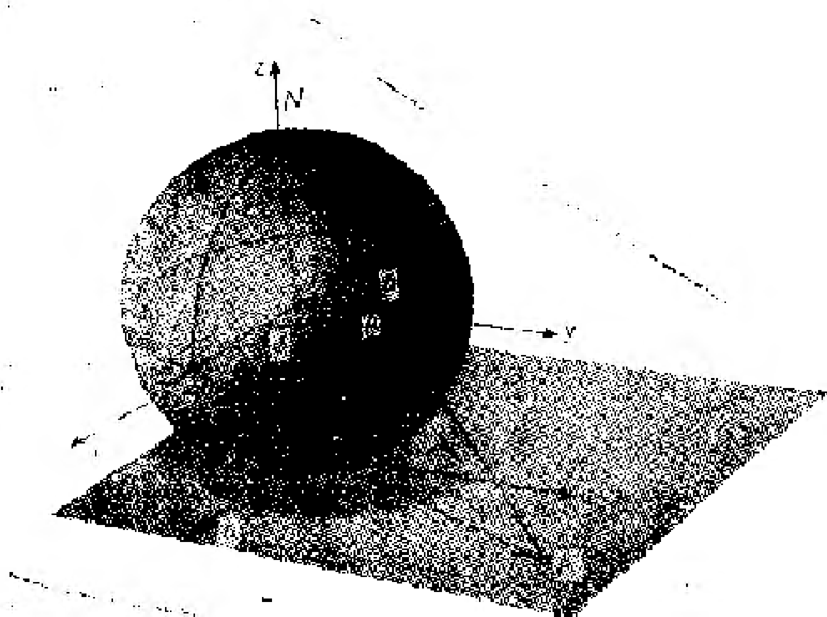


图 18.1.4.2.

持角度（见 18.1.2.4 中明确的定义或 18.10.3 和 18.11.22），且将 $S\setminus m$ 的 $d-1$ 维小球面变换成 H 的球面，参看 10.8.2。

18.1.4.4 如果 f（或 g）是 S^d 到 $\mathbf{R}^d$ 上关于北极（或南极）的球极投影，则 $g\circ f^{-1}:\mathbf{R}^d\setminus 0\to\mathbf{R}^d$ 正好是 $\mathbf{R}^d$ 关于极点 0 的幂为 1 的反演变换。

18.1.4.5 球极投影表明

$$S^1\cong\mathbf{R}\cup\infty=\tilde{\mathbf{R}}\cong P^1(\mathbf{R})$$

和

$$S^2\cong\mathbf{R}^2\cup\infty\cong\mathbf{C}\cup\infty=\mathbf{C}\cong P^1(\mathbf{C})，参看 4.3.8。$$

地 图 的 绘 制

在 18.1 节所有余下部分中我们假设 $d=2$，且置 $S=S^2$。

18.1.5 图

18.1.5.1 我们把 S 的一个子集 A 和一个单射 $f:A\to\mathbf{R}^2$ 所组成的 (A,f) 偶称为 S 的图。f 往往还是 A 到 $f(A)$ 上的一个同

胚。例如，球极投影 18.1.4.3 总是图，其中 $A = S\backslash m$。但我们可以看出不存在整个 S 的图，即不存在同胚 $f:S \to f(S) \subset \mathbf{R}^2$。为看出此结果，设 x 属于 S，则根据假设和 18.2.6.5，可知对所有 $x \in S$ 而言 $f(S\backslash x) = f(S)\backslash f(x)$ 是 $\mathbf{R}^2$ 的开集，然而这与下面的事实矛盾：$f(S)$ 作为内部非空的紧集肯定不再有边界点（如有需要可参见 11.2.9）。

18.1.5.2 附注. "图"这个词有许多意思，其中最理论化的是上述的 (A, f) 偶，而最具体的则是一纸黑白或彩色的图片。

18.1.5.3 大地水准面. 现在我们要研究的 S 不是别的球面，而是地球！更确切地说是大地水准面，即在其每点处都垂直于重力线（且通过一个参照点）的一个曲面。当然，这个大地水准面是同胚于 S 的。往后我们只用到它是双射，但要求图能保持 S 的度量和角度性质；而对 18.4 中所定义的 S 的规范度量而言，大地水准面是不等距于 S 的（甚至在不计相差一个数量时也不等距）。实际上唯一可考虑的合理的近似是将其作为一个旋转椭球面，它的长半轴 $a = 6378388$ 米，短半轴 $b = 6356912$ 米，因此扁度 $\frac{a-b}{a} = 1/297$。然而，今后我们研究的只是 S，而不是大地水准面；当然，在实用时应该对下面的结果作某些修改。因此读者也可领略一点实际计算的复杂性，Mercator 横向射影（参看 18.1.8.4）中纬线和经线的方程以及大地水准面的相应计算就是一例；这种计算是 Gauss 就已经会做的。

18.1.5.4 有关地图绘制术的参考文献是： [CN] 包括相当一般的结果，但欠详细，[HOL] 中第 II 章已更数学化，[LS] 中第 IV 章包含许多关于 Lambert 射影、通用 Mercator 横向射影的数学内容以及大地水准面的有关内容，最后可参见 John Milnor, A problem in cartography, American Mathematical Monthly, 76(1969)，第 1101—1102 页。

18.1.6 地球坐标图

18.1.6.1 对点 $m \in S$，称实数

$$\theta(m)=\frac{\pi}{2}-(\overrightarrow{0n},\ \overrightarrow{0m})$$

为纬度；赤道上的点是纬度为 0 的点，北极和南极的纬度分别是 $\pi/2$ 和 $-\pi/2$。 如果 $m\in S\setminus\{n, s\}$，称定向直线所夹的定向角 $\widehat{\overrightarrow{0a},\ \overrightarrow{0m'}}$ 的测度（取值于 $-\pi$ 和 π 之间）为 m 的经度，其中 $a=(1, 0, 0)$，m' 是 m 在 x, y 平面上的射影。 除非 m 属于以 n, s 为端点且通过 $(-1, 0, 0)$ 的半大圆 Γ，m 点的经度 $\varphi(m)$ 是唯一确定的；n, s 的经度是在 $[-\pi, \pi]$ 中完全不定的，而对 Γ（半大圆 Γ 是“国际日期线”）的其他点，其经度可取值为 π 或 $-\pi$。

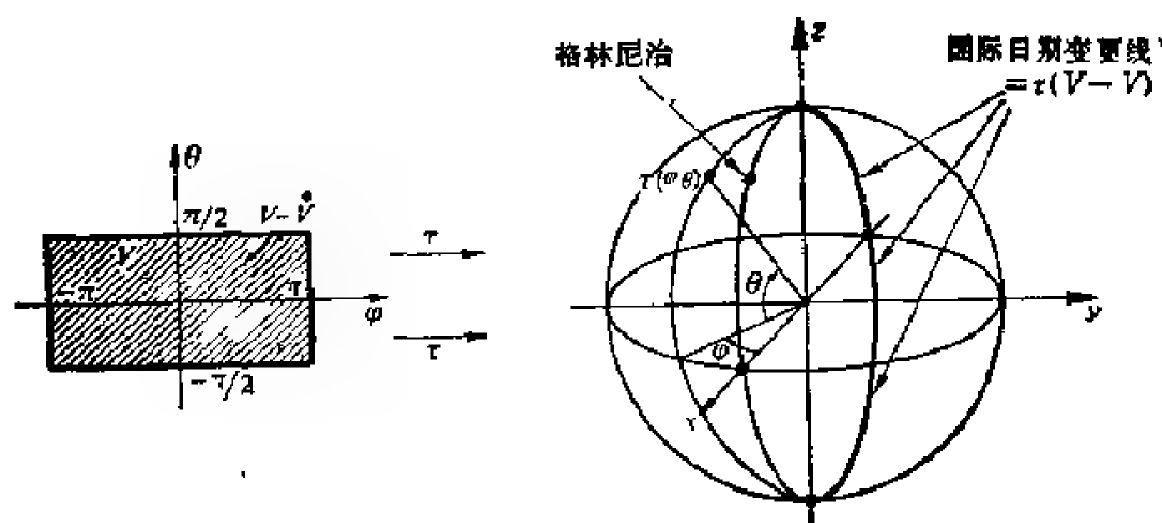


图 18.1.6.1.

Berger, Gostiaux, «微分几何», Armand Colin 出版社，大学丛书

我们称 $(S\setminus\Gamma, f_0)$ 偶为地球坐标图，其中 $f_0(m)=(\varphi(m), \theta(m))\in\mathbf{R}^2$；它的像是矩形

$$]-\pi,\pi[\times]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[.$$

映射 $\tau=f_0^{-1}$ 由下式定义：

18.1.6.2 $\tau(\varphi, \theta)=(\cos\varphi\cos\theta,\ \sin\varphi\cos\theta,\ \sin\theta)\in\mathbf{R}^3$.

记住，S 的经线和纬线分别是经度和纬度等于常数的曲线。

18.1.6.3 对大地水准面我们也可以（而且应该）定义地球坐标；对于经度，那是没有什么问题的，对于纬度则可取法线与赤道

平面所成的角，这也就是说纬度是通过重力线给出的。

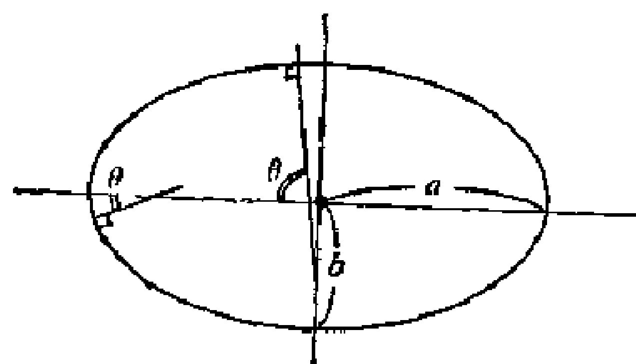


图 18.1.6.3.

18.1.6.4 实际上，S（或地球）的几乎所有的图 f，都不是通过映射 f 本身，而是通过映射

$$g = f\circ\tau = f\circ f^{-1}$$

（参看 18.1.6.2）给出的，这个映射具有如下形式：

$$x = u(\varphi, \theta),$$
$$y = v(\varphi, \theta).$$

18.1.6.5 对于大地水准面，应该选择一个原点，以便知道什么地方经度为 0；实际上这就是格林尼冶经线（见图 18.1.6.1），它的一个好处是让国际日期变更线落在太平洋中间，从而避免了太过份的笑话。

18.1.7 对图的要求

18.1.7.1 不仅集合论学者，而且每个步行者，每个在陆地经商或是航海的人，都必须在图中计算距离（对度量的，见 18.4）、面积（对规范测度的，见 18.3.7）和角度（参看 18.1.2.4）。看来距离是最重要的（考虑到腿的疲劳，煤油的价格等等），因此我们希望 S 在 A 上的诱导度量和 $\mathbf{R}^2$ 在 $f(A)$ 上的诱导度量之间有一些（不计数量差别的）等距图。然而遗憾的是，我们在 18.4.4 中会看到不论 S 的开集 A 有多小，都不存在任何一个这样的图。

18.1.7.2 但是，却存在一些共形图，也就是保持角度的图（若有需要可参看 18.10.3 中的明确定义）：例如球极投影，参看 18.1.4.3。因为利用 $\mathbf{R}^2$ 的一个局部共形映射，例如 $\mathbf{C}=\mathbf{R}^2$ 的任一全纯函数，总可构成一个球极投影，所以共形图是很多的，见 9.5.4.3。

18.1.7.3 这些共形图——我们所用的大多数是这种图——并不是出于不得已而选用的。理由如下：在 $m\in A$ 处，共形图 (A, f) 将一个仅与 m 有关而与 m 处的切方向无关的系数 $k(m)$ 乘

到无穷小的长度上．由于实际上我们经常是在 S 的很小的区域 A 内研究问题，故若这图不是太不正规的话，在 A 的一个小区域内系数 k 的变化是很小的，于是我们可以通过修正的方法充分近似地计算出长度和面积。

显然也存在不改变面积的图，称为等面图，18.11.27 中给出了一个例子。

18.1.8 几种不同类型的图

18.1.8.1 附注． 其实所有的图都可称为射影，其原因在于最初的图实际上就是由从 $\mathbf{R}^3$ 的一点出发，S 在 $\mathbf{R}^3$ 中到一平面上的射影来定义的，例如就象球面投影的情形那样。正如 18.11.27 中的"柱面射影"那样，上述意义可以推广到在一个柱面上的射影，然后我们可将这柱面展开成平面。

现在我们沿用"射影"这个词，但从下面的 Mercator 图开始就已经不是空间射影的问题，更不必说实际上我们研究的还是大地水准面了(参看 18.1.6.3)。

18.1.8.2 古典 Mercator 射影． 它定义为(当然不计数量因子的差别)在 18.1.6.4 的意义下具有形式 $(\varphi,\theta)\longmapsto(\varphi,V(\theta))$ 的共形图；由此可唯一地决定函数 V。这个图 f 的反函数 F 应形如

$$F:(u,v)\longmapsto\tau(u,W(v)),$$

其中 τ 是映射 18.1.6.2，而 $W=V^{-1}$。我们看到偏导向量 $\partial F/\partial u$，$\partial F/\partial v$ 满足

$$\left(\frac{\partial F}{\partial u}\middle|\frac{\partial F}{\partial v}\right)=0,\quad\left\|\frac{\partial F}{\partial u}\right\|=|\cos W|,\quad\left\|\frac{\partial F}{\partial v}\right\|=|W'|.$$

图为共形的充要条件是 $W=\cos W'$，它的解是原函数 $t\longmapsto1/\cos t$ 的反函数，于是

$$V(\theta)=\log\left(\operatorname{tg}\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right).$$

换句话说，Mercator 射影是将纬线和经线表示为互相垂直的直线，且沿赤道等距的唯一的共形图。对 18.1.7.3 中的 k 变化不太

大的航行而言，不论在航海或航空中这都是一张至关重要、非常有用的图。实际上经线和纬线就是正交的坐标直线；由于还是共形的，可知按不变航向行驶的轮船或飞机的轨线是图上的**直线**，因此可以用直尺画出这轨迹，而它们就是轮船或飞机在某一段时间内航行的轨迹：驾驶员让罗盘指着船长或机长指定的方向。

在球面上，这些轨迹（也就是与所有经线交成固定角的曲线）称为**斜驶线**；它们关于 (φ, θ) 的方程就是

$$\varphi = \alpha \log\left(\operatorname{tg}\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right) + \beta \quad (\alpha, \beta \in R).$$

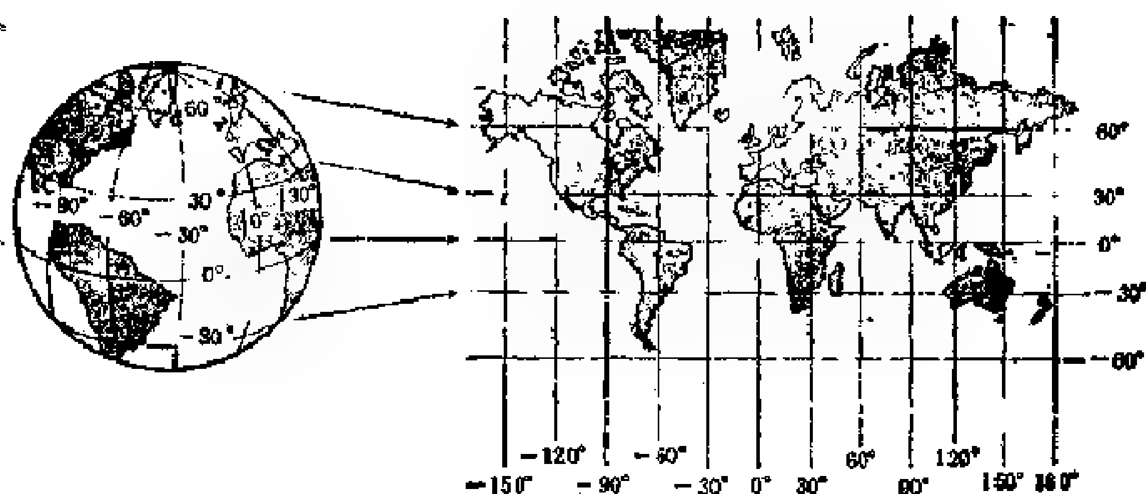


图 18.1.8.2. Mercator 射影

18.1.8.3 横向或斜向的 Mercator 共形射影. 古典 Mercator 图在接近极点时对系数 k 而言是十分糟糕的，因为在那里 k 趋向无限大因而变化很大，因此，距离和面积的问题实际上是没法在保证精确度的前提下得到解决的；相反地，我们注意到古典 Mercator 图在赤道附近是极好的，因为在那里系数 k 有一极小值且变化很小("一个函数在极值点邻近变化甚微")。

如果我们想要在 S 的任意一点处实现这一点，也并无任何困难：我们可以通过一个旋转(因而是等距变换）将点转到赤道上；显然纬线和经线在图上从理论上说是很不好看的曲线，而实际上在一个小区域里却几乎是一些直线。如果说我们可以从直观上这

样来看古典 Mercator 图：沿着赤道作外切于 S 的圆柱面，将球面射影到它上面，但与此同时改变纬度以保证图是**共形的**，最后展开这圆柱面，那么斜向 Mercator 射影（横向 Mercator 射影是它的一个特例）就可以看作沿有待绘制地图的球带内的任一大圆进行类似的程序。我们有时也用通过交球面于两个小圆的圆柱面所得到的图，这时沿着两个小圆就有一个等距。所有这些情形给出的都是共形图。

目前在世界上用得最多的射影是**横向** Mercator 射影，即对沿经线与球面外切的圆柱面所作的射影。有时也称之为 Gauss **映射**，现在用缩写 MTU（Mercator transverse universal，即通用横向 Mercator 射影）表示，例如，瑞士联邦地图测绘局目前采用的就是这种系统。利用格林尼治经线作为相切的经线（见 18.1.6.5），则相应于此图的公式 18.1.6.4 是

18.1.8.4

$$x=\frac{1}{2}\log\left(\frac{1+\cos\theta\sin\varphi}{1-\cos\theta\sin\varphi}\right),\quad y=\mathrm{Arctg}\left(\frac{\mathrm{tg}\,\theta}{\sin\varphi}\right).$$

与 MTU 有关的数学计算，可见 [HOL] 第 II 章，其中讨论了球面的情形；对大地水准面的情形，计算更为复杂，但在数学上也更有兴趣，可参看 [LS] 的第四章。

18.1.8.5 Lambert 共形射影．其想法是改造古典 Mercator 射影，但要使经线和纬线仍然是 $\mathbf{R}^2$ 中的简单曲线．除了一族平行直线和它们的正交直线以外，最简单的系统就是取同心圆以及过这些圆的中心的直线，我们完全可以这么说：我们是在 $\mathbf{R}^2$ 的极坐标 r 和 α 中研究问题．关于 Lambert 射影，类似于 18.1.6.4 的公式形如：

$$(\varphi,\theta)\longmapsto(r(\varphi,\theta)=\Xi(\theta),\ \alpha(\varphi,\theta)=\varphi\sin\theta_0),$$

其中 θ_0 是所讨论处的纬线的纬度，待定的函数 Ξ 应使图是共形的。沿着所考虑的纬线是等距的；利用 18.1.8.3 的直观语言，我们可以说：将 S 投影到沿有关纬线与 S 相外切的圆锥面上，再将这圆锥面展开到平面上，然后通过一个函数适当调整极径而使投影

是共形的。因此，经线成为直线，而纬线成为正交圆。如同对 Mercator 射影那样，我们也可以考虑与球面交于两条纬线的圆锥

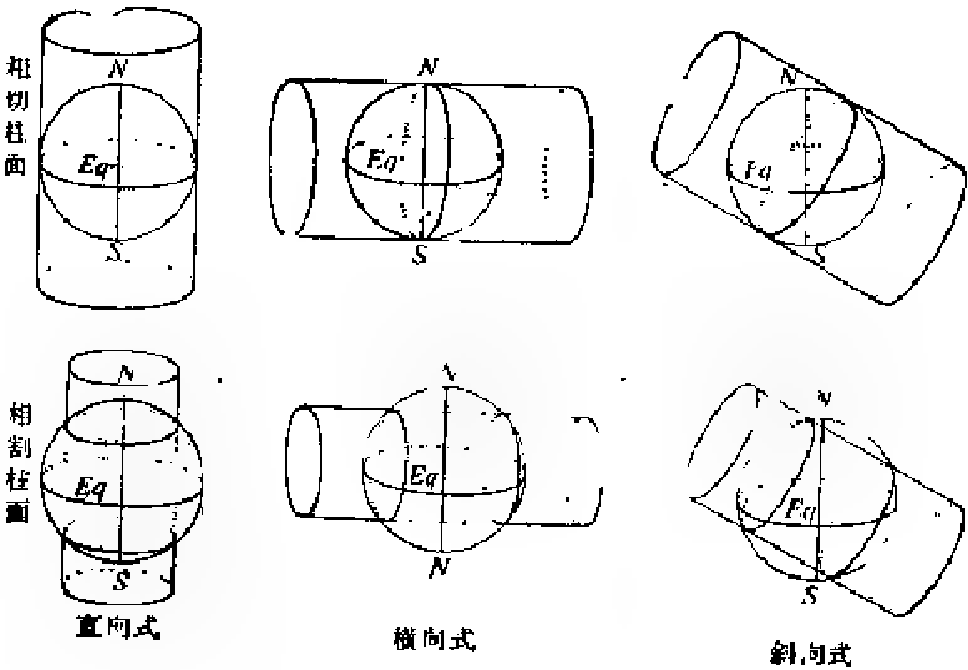


图 18.1.8.5.1.

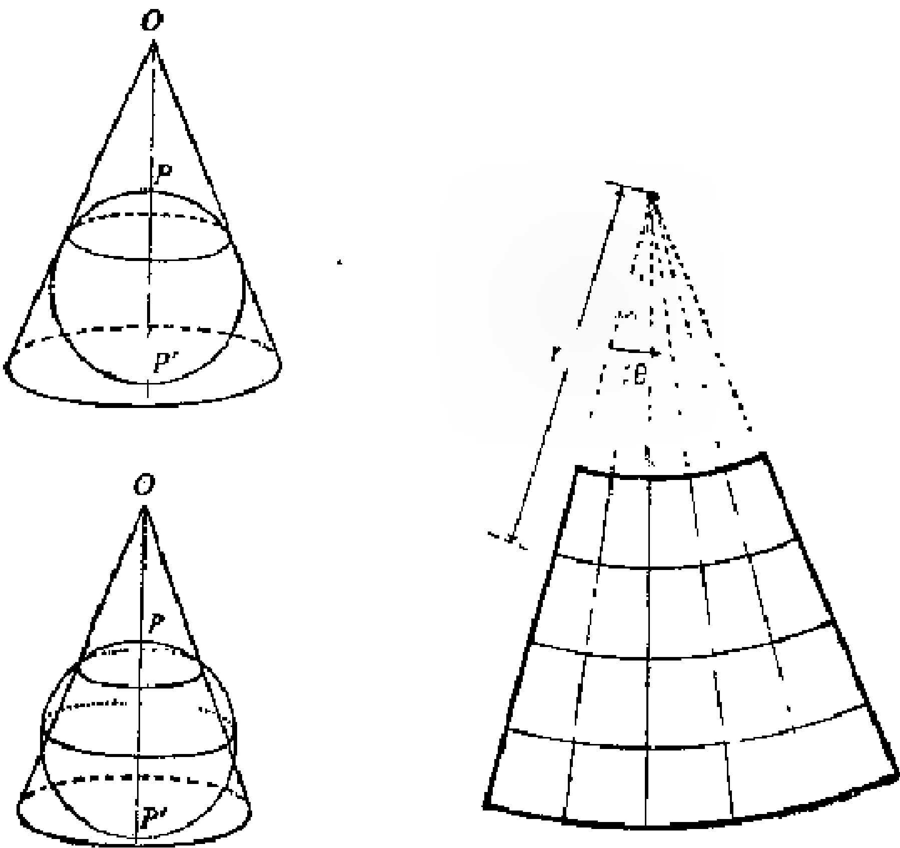


图 18.1.8.5.2.

面。

法国现行的地图绘制采用 Lambert 射影；全法国由三个射影覆盖，其中每个盖住二度的球带，18.1.7.3 中系数 k 的最大值和最小值之比小于 $1\ 10^{-3}$. 如果读者有疑问，可以凭目测或借助于直尺验证在 I G N 的图上纬线不是直线.

有关 Lambert 射影的数学计算可参看 18.1.8.4 末尾所列的参考文献.

18.1.8.6 球极射影. 球极射影不仅仅对数学工作者有用（例如见 18.10.2），在适当地绘制两极附近区域即穹顶区域的图时也要用到它（从极点作的球极射影）. 球极射影是共形图；经线映成相交于极点的直线，且根据 18 1 4 3 球面的所有大圆都映成圆。

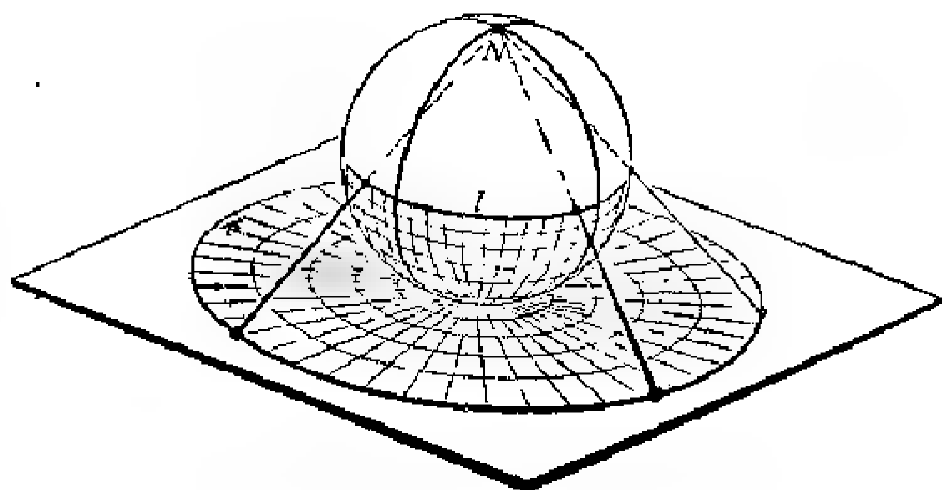
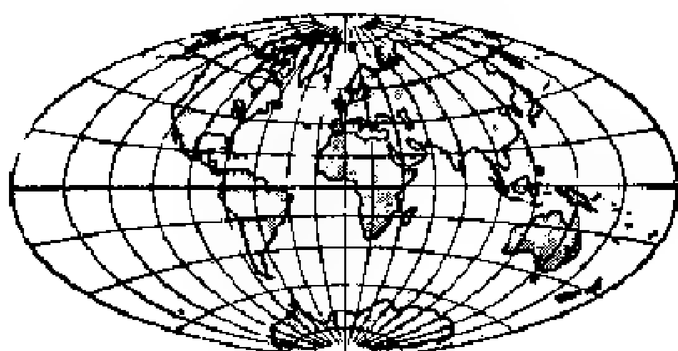


图 18.1.8.6.

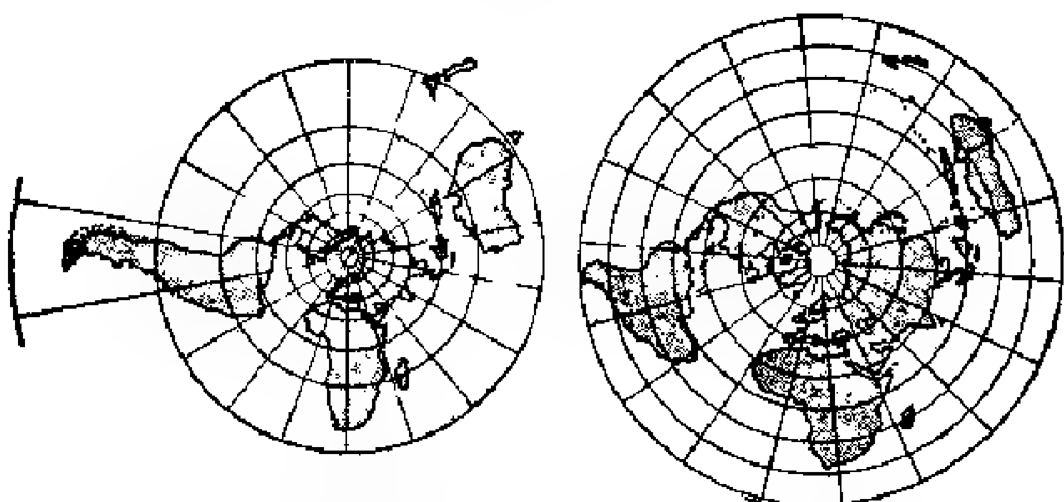
Hilbert. Cohn-Vossen, «直观几何», Chelsea.

绘制地图所用测度的精确性，以及对地图提出的越来越高的精确度要求，使覆盖法国的三组 Lambert 射影的衔接误差越来越显得不可容许了，怎样用单独一个（从新西兰作的！）球极射影来覆盖法国，这是一个问题。

18.1.8.7 其他系统. 上述讨论表明，任何整个地球的图总是在某些部位有缺陷的；然而这个问题却引发了大量富有创见的想法，下面的图给出其中的一些例子。

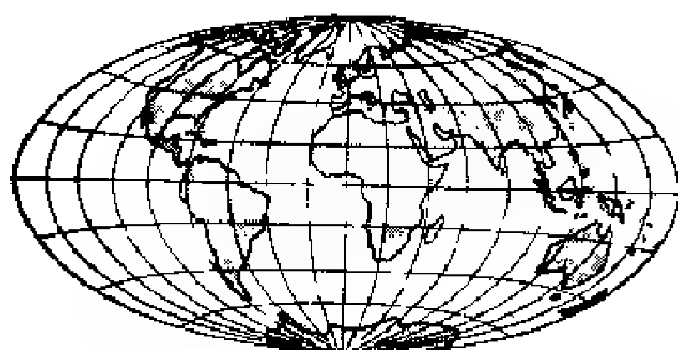


360° 展开的横向 Lorgna 射影
（Hammer Aitoff 变换）

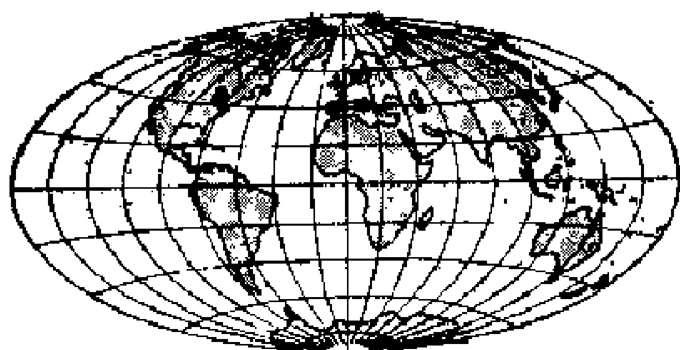


球极射影外推法
（直向式）

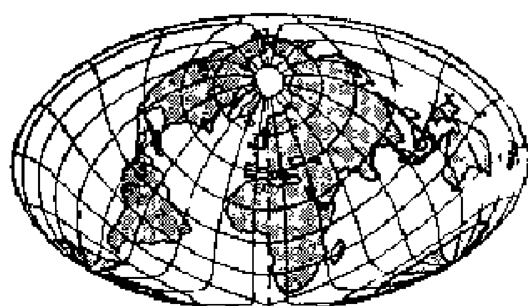
G. Postel 射影外推法
（直向式）



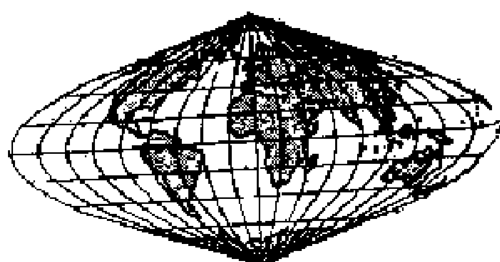
360° 展开的横向球极射影图



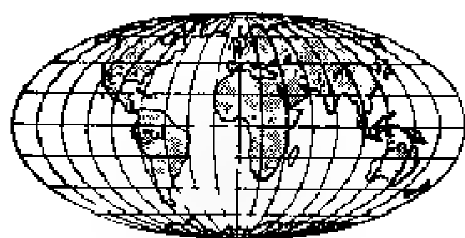
360° 展开的横向 G. Postel 射影
(Aitoff 变换)



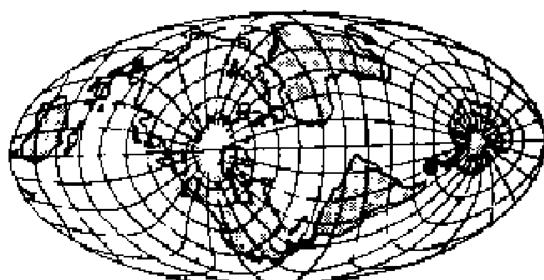
Briesemaister 射影



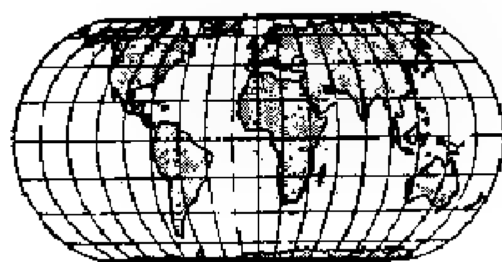
Sanson-Flamsteed 射影



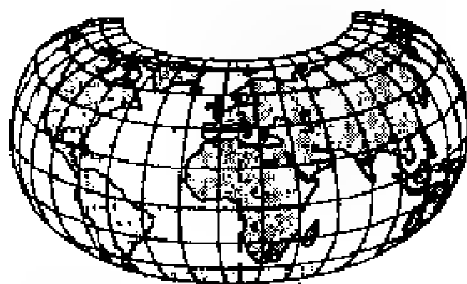
Mollweide 射影



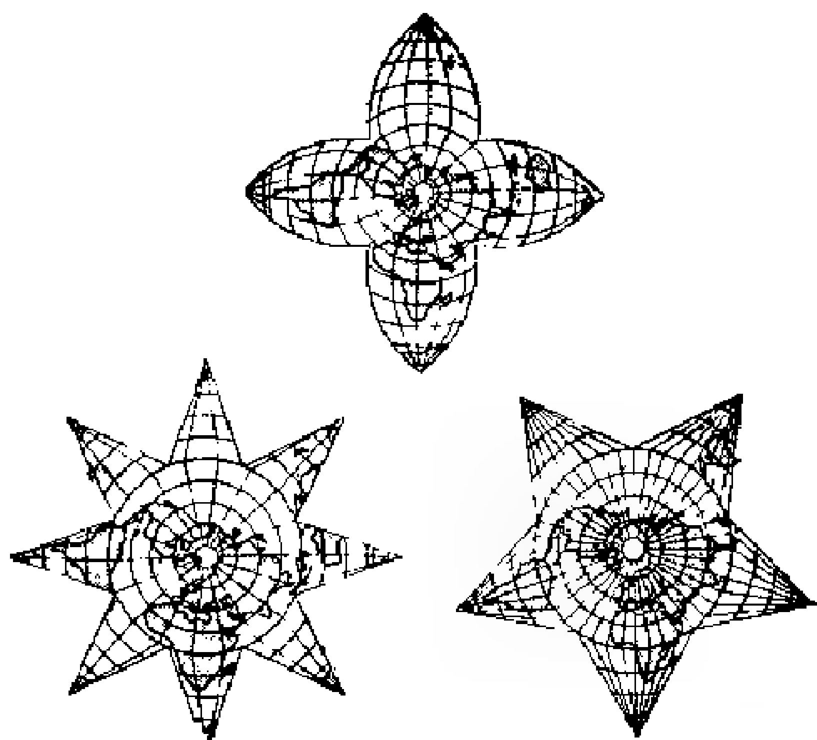
Bartholomew 的 "Atlantis" 射影



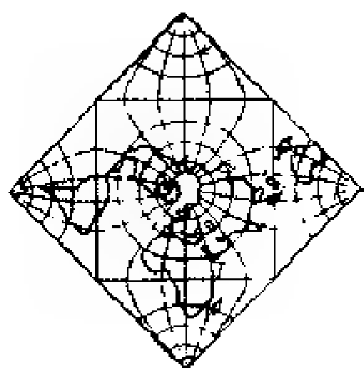
Eckert IV 射影



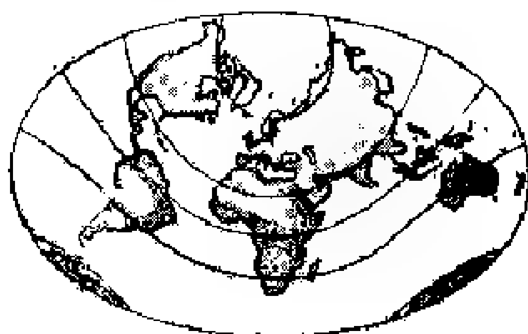
Raisz 的 "amardillo" 射影



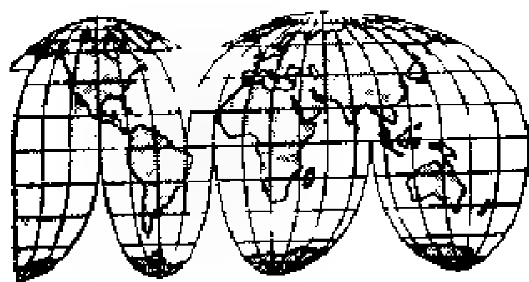
星形射影



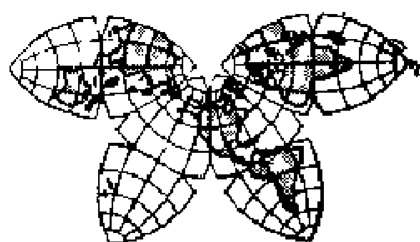
Peirce 周期性射影



Ber in 补偿射影



Goode 不连续射影



Cahill 不连续射影

R. Cuenin, 《一般地图绘制》, 第一卷, Eyrolles.

18.2 拓扑和代数拓扑

18.2.1 命题. S^d 在每一点处局部同胚于 $\mathbf{R}^d$,因而是局部连通的;S^d 是紧致的. 若 $d \geqslant 1$, S^d 是弧连通的.

由图的存在性,例如球极射影(参看 18.1.4)的存在性,即得第一个断言. S^d 作为 $\mathbf{R}^{d+1}$ 的有界闭集,必是紧致的. 为了证明 S^d 是弧连通的,由于 S^d 的任意二点至少属于 $\mathbf{R}^{d+1}$ 的一个二维向量子空间,因而只需知道 S^1 是连通的就够了,参看 8.3.8.

讨论连通性(一般拓扑)以后,还要讨论单连通性(代数拓扑),也就是要讨论基本群 $\pi_1(S^d)$ (对这一概念,可见 [ZN], 第 2 章),对此我们有

18.2.2 命题. $\pi_1(S^1)$ 同构于 $\mathbf{Z}$, 对所有的 $d \geqslant 2$ 有 $\pi_1(S^d) = 0$ (即对 $d \geqslant 2$, S^d 是单连通的).

18.2.3 对 $d = 1$ 的情形及应用,可见 [B-G] 第 289 页和第 9 章,以及 [CH 2] 第 62 页. 现在假定 $d \geqslant 2$, $U_0 = S\backslash n$, $U_1 = S\backslash s$, 其中 $S = S^d$, n 和 s 是 S 的北极和南极 (参看 18.1.2.3). 我们可假设回路 $f \in C^0([0,1]; S)$ 对起点 s 有: $f(0) = f(1) = s$, 现要证明 f 同伦于零. 因为 U_0 和 U_1 是 S 的开集, 且 $U_0 \cup U_1 = S$, 故对任何的 $t \in [0,1]$, 总存在 $V_t \in O_t(\mathbf{R})$ 使 $f(V_t) \subset U_0$ 或 $f(V_t) \subset U_1$. 由于 $[0,1]$ 的紧致性,我们不妨取有限个这样的 V_t: V_{t_i} $(i = 1, \cdots, m)$, 并去掉那些多余的点, 也就是说, 设有 $f(V_{t_i}) \subset U_0$ (相应地, U_1), 则 $f(V_{t_{i+1}}) \subset U_1$ (相应地, U_0). 由此,最后就得到一个序列 $0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_m < 1$, 使对所有 i 成立 $f([t_i, t_{i+1}]) \subset U_0$ 或 U_1. 如果 $f([t_i, t_{i+1}]) \subset U_0$, 我们不去改动它;如果 $f([t_i, t_{i+1}]) \subset U_1$, 且 $n \notin f([t_i, t_{i+1}])$, 同样也不予变动. 相反, 若 $n \in f([t_i, t_{i+1}])$, 则用下面构造的新映射 f_i': $[t_i, t_{i+1}] \to S$ 来代替 $f|_{[t_i, t_{i+1}]}$. 对南极的球极射影 f_s 而言, $g = f_s \circ f: [t_i, t_{i+1}] \to \mathbf{R}^d$ 是存在的,这是因为 $f([t_i, t_{i+1}]) \subset U_1$. 我们任取不同于 $g(t_i), g(t_{i+1}), O$ 的 $w \in \mathbf{R}^d$, 并将 $g([t_i, t_{i+1}])$ 射影

到由 w 和 $q(t_i)$、$q(t_{i+1})$ 所确定的两条半直线上，这样就将 q 连续地变成 q': $[t_i, t_{i+1}] \to \mathbf{R}^d$ 而使 $O \notin q'([t_i, t_{i+1}])$。将它与 f_s^{-1} 合成，就得到 f'_i: $[t_i, t_{i+1}] \to S$，使 f'_i 是 $f|_{[t_i, t_{i+1}]}$ 的连续变形，保持端点 $f(t_i)$ 和 $f(t_{i+1})$ 固定，且 $n \notin f'_i([t_i, t_{i+1}])$。将这些变形的全体粘连起来，就得到 f 的连续变形 f': $[0, 1] \to S$，使 $f'(0) = f'(1) = s$，且 $n \notin f'([0, 1])$。于是我们可考虑 $\mathbf{R}^d$ 中的回路像 $f_n \circ f'$: $[0, 1] \to \mathbf{R}^d$，由于 $\mathbf{R}^d$ 是平凡单连通的，因此，通过 f_n^{-1} 回到 S 上，就可看出 f' 可连续成一点，从而 f 也同样如此，这就是说 S 是单连通的。

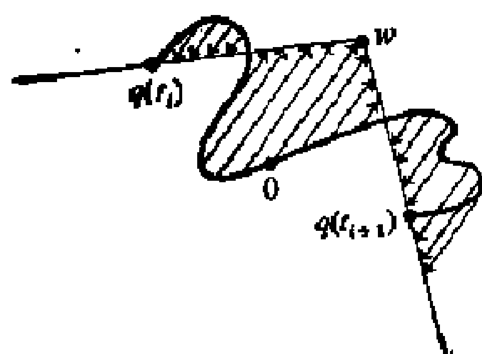


图 18.2.3.

18.2.4 注

18.2.4.1 读者会注意到，18.2.2 不可能证明得更加简单了，因为 $f \in C^0([0, 1], S)$ 的像 $f([0, 1])$ 可能刚好是整 S（试比较 Peano 曲线）。为了通过球极射影将问题归结为仿射空间的情形，关键是设法使 S 上有一点不在 $f([0, 1])$ 中。如果 f 是可微的，则 $f([0, 1]) \neq S$，因为实际上 $f([0, 1])$ 这时是零测度的；18.2.2 的另一证明方法是通过可微的 f 去逼近连续的 f：例如可参看 [GM] 第 17 页。

18.2.4.2 事实上证明 18.2.3 包含了 Van Kampen 的更一般结果的证明的基本思想：参看 [GM] 第 II 章或 [ZN] 第 45 页。

下面的概要论述是从文化背景的角度给出的，有兴趣的读者请参考所提到的著作。

18.2.5 同调，映射度

18.2.5.1 在某些适当的拓扑空间中，我们附加上同调群，这种附加的群是连续映射的函子。对 S^d 而言，除了 $H_0(S^d)$ 和 $H_d(S^d)$ 都同构于 $\mathbf{Z}$ 以外（$d \geqslant 1$），其他所有的同调群 $H_i(S^d)$ 都为零。

$H_0(S^d)\simeq \mathbf{Z}$ 这一事实并没有多大意义，它仅仅反映了 S^d 的连通性。相反，$H_d(S^d)\simeq \mathbf{Z}$ 跟它在 $d=1$ 时的结论 $\pi_1(S^1)\simeq \mathbf{Z}$ 一样，有广泛的应用。

18.2.5.2 实际上若设 $f\in C^0(S^d,S^d)$，则由函子性质可以从 f 诱导一个群同态 $f_*\in \mathrm{Hom}(H_d(S^d),H_d(S^d))$。因为 $H_d(S^d)$ 规范地同构于 $\mathbf{Z}$，所以我们可写 $f_*(m)=km$，k，$m\in\mathbf{Z}$，这一整数 k 完全依附于 $f\in C^0(S^d,S^d)$，称为 f 的**度**并记为 $\deg(f)$。

容易看出映射度具有下列性质：

$$\deg(\mathrm{Id}_{S^d})=1,\ \deg(-\mathrm{Id}_{S^d})=(-1)^{d+1},$$

若 f 是常映射，则 $\deg(f)=0$，若 f 和 g 是相互可以连续变形的(即是同伦的)，则 $\deg(f)=\deg(g)$，若 f 是非满射，则 $\deg(f)=0$，最后，$\deg(f\circ g)=\deg(f)\deg(g)$。

18.2.5.3 推论. d 为偶数时，在 S^d 上的任何连续向量场 ξ：$x\longmapsto\xi(x)\in T_xS^d$ 至少在一点处为零。

利用反证法：若 $\forall x\in S^d$ 有 $\xi(x)\neq 0$，则可将 ξ 单位化：

$$\eta=\frac{\xi}{\|\xi\|}:x\longmapsto\eta(x)=\frac{\xi(x)}{\|\xi(x)\|},$$

η 仍是连续向量场，于是可以通过单参数映射族

$$f_t:x\longmapsto\cos t\cdot x+\sin t\cdot\eta(x),\ t\in[0,\pi]$$

将 Id_{S^d} 变形成 $-\mathrm{Id}_{S^d}$。所以

$$\deg(\mathrm{Id}_{S^d})=\deg(-\mathrm{Id}_{S^d}),\text{与}\ \deg(\mathrm{Id}_{S^d})=1,$$
$$\deg(-\mathrm{Id}_{S^d})=(-1)^{d+1}$$

矛盾。

18.2.5.4 例如在地球上总存在一点，在那里风速为零。再如：要将球面 S^2 上的头发梳得一丝不乱是不可能的。

18.2.5.5 对任何奇数 d，在 S^d 上处处不为零的向量场总是存在的：例如在 $d=2n-1$ 时可取

$$\xi(x_1,\cdots,x_n)=(-x_2,x_1,-x_4,x_3,\cdots,-x_{2n},x_{2n-1}).$$

对 $n=2$，这样得到的向量场正是 § 1.2.9 中所描述的作用的轨道的速度向量场，也可参看 18.8.1。

18.2.5.6 推论. 设 $f\in C^0(S^{2n},S^{2n})$. 若 $\deg(f)\neq -1$, 则 f 至少有一个不动点,即 $\exists x\in S^{2n}|f(x)=x$. 特别当 f 同伦于恒等映射时,结论成立(试与 18.2.5.3 比较).

用反证法: 假定 $\forall x\in S^{2n}$ 有 $f(x)\neq x$. 则 $f'=(-\mathrm{Id}_{S^{2n}})\circ f$ 使 $\forall x\in S^{2n}$, $f(x)\neq -x$. 但这时将 x 与 $f'(x)$ 连续地连接起来, 因为存在从 x 到 $f'(x)$ 的唯一的大圆弧, 这就给出了 f' 和 $\mathrm{Id}_{S^{2n}}$ 之间的一个连续变形,因此

$$\deg(f')=\deg(\mathrm{Id}_{S^{2n}}),$$

与 $\deg(f')=\deg(f)\deg(\mathrm{Id}_{S^{2n}})$ 矛盾.

18.2.5.7 18.2.5 6 的结果还可以利用 Lefschetz 关于映射不动点的一个更一般的结果得出: 例如见 [GG] 第 224 页.

18.2.5.8 在可微映射范畴内, 18.2.5 可以处理得更为简单, 例如可见 [B-G] 第 273 页.

18.2.6 Jordan-Brouwer 分离定理

在这一节中 $d\geqslant 1$, 仍从同调群 $H_d(S^d)\cong \mathbf{Z}$ 出发, 经过一些细致的步骤即可证得(例如可参看 [GG] 第 81 页):

18.2.6.1 定理. 设 V 是 S^d 的同胚于 S^{d-1} 的子集, 则 $S^d\setminus V$ 恰好有两个具有公共边界 V 的连通分支.

利用球极射影可得:

18.2.6.2 推论. 设 V 是 $\mathbf{R}^d$ 的同胚于 S^{d-1} 的子集,则 $\mathbf{R}^d\setminus V$ 恰好有两个具有公共边界 V 的连通分支, 其中一个分支是相对紧致的,称为 V 的内部,另一个分支是无界的,称为 V 的外部.

18.2.6.3 对 $d=2$, 根据定义 V 就是 $\mathbf{R}^2$ 的简单闭曲线, 而 18.2.6.2 就是 Jordan 定理. 对 $d=2$ 这种最简单的情形,可参看 [B-G] 第 339 页或 [DE 7] 第 251 页的初等证明.

18.2.6.4 从 18.2.6.2 容易得到下面的基本结果:

18.2.6.5 定理(区域不变性定理). 设 $U\subset\mathbf{R}^d$ 是连通开集, $f:U\to\mathbf{R}^d$ 是连续单射,则 $f(U)$ 是开集,且 f 是同胚.

18.2.6.6 推论. $\mathbf{R}^d$ 和 $\mathbf{R}^{d'}$ 仅当 $d=d'$ 时才可能局部同胚.

18.2.6.7 注. 结论减弱后证明是初等的：例如 $\mathbf{R}^d$ 和 $\mathbf{R}^{d'}$ 仅当 $d=d'$ 时才可能局部微分同胚(例如参看 [B-G] 第 21 页)，又例如 $d=1$ 或 $d=2$ 的情形，因为若 U 是 $\mathbf{R}^d$ 的开集，且 $x\in U$，则 $U\backslash x$ 在 $d=1$ 时是不连通的，在 $d\geqslant 2$ 时是连通的，而 $U\backslash x$ 在 $d=2$ 时不是单连通的，在 $d\geqslant 3$ 时则是单连通的.

18.2.7 Borsuk-Ulam 定理. 对任何连续映射 $f: S^d\to\mathbf{R}^d$，至少存在一点 $x\in S^d$ 使 $f(x)=f(-x)$.

其证明可见 [BN] 第 337 页.

18.3 球面作为微分流形；规范测度

18.3.1 在 9.12.7 中我们曾经指出当 $2\leqslant k\leqslant n$ 时对 n 维欧氏空间的"k 维"子集定义测度所存在的困难；凸集（见 12.10）的情形是例外，但也颇为棘手. 我们之所以要利用积分理论和微分子流形理论的一些结果来定义 S 的规范测度，原因就在于此；事实上所有严密的理论都不是一蹴而就的. 另外，S 的规范测度在本书其他章节中仅在 12.7.3.1 中证明 12.7.3 时用到，而对此我们已在 12.7.3.2 中明确地给出过一个初等证明；这就是下面的阐述比较简单的缘故.

18.3.2 球面是 $\mathbf{R}^{d+1}$ 的一个 C^∞ 微分子流形；事实上，球面由方程 $f=\|.\|-1$ 定义，求导即得 $f'(x)=2(x|.)$，该导函数在 S 上恒不为零；因此，S 在 x 处的切空间为 $(f(x))^{-1}(0)=x^\perp$，与 18.1.2.4 一致(参看 [B-G] 第 56 页和第 86 页).

18.3.3 我们记得，T_xS 是 $\mathbf{R}^{d+1}$ 中 S 上的 C^1 类曲线的速率向量集合；关于 S 上曲线的几何学，例如可见：18.1.8.2 中提到过的斜驶线，9.14.34.3 E 中的球面螺线以及 [B-G]，8 7 12 和 9.9.6.

18.3.4 定向. 考虑 $\mathbf{R}^{d+1}$ 的规范定向，则球面 S 作为球体 $B(0,1)\subset\mathbf{R}^{d+1}$ 的边界容有一个规范定向(参看 [B-G] 第 182 页). 给出 S 定向的另一方法是利用微分形式；$\mathbf{R}^{d+1}$ 的 d 次微分形式

$$\sigma = \sum_{i=1}^{d+1}(-1)^{i-1}x_i dx_1\wedge\cdots\wedge \hat{dx_i}\wedge\cdots\wedge dx_{d+1}$$

在 S 上的限制称为 S 的**规范体积形式**；这个形式 σ 不是别的，正是 S 的单位法向量和 $\mathbf{R}^{d+1}$ 的规范体积形式

$$\omega = dx_1\wedge\cdots\wedge dx_{d+1}$$

的内积。对 S^2，有 $\sigma = xdy\wedge dz + ydz\wedge dx + zdx\wedge dy$（上述内容可参看 [B-G] 第 173 页）。例如地球坐标图 18.1.6.1 是正定的（参看 [B-G] 第 174 页），因为我们有

18.3.5 $\quad \tau^*\sigma = \cos\theta d\varphi\wedge d\theta\left(\theta\in\left]-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right[\right).$

18.3.6 形式 σ 完全由 S 确定，所以是规范的；由此可知，它在 $O(d+1)=\mathrm{Is}(S)$ 下是不变的(参看 18.5)。此外，S 上所有次数大于零且在 $\mathrm{Is}(S)$ 下不变的微分形式都与 σ 成比例。

18.3.7 规范测度

18.3.7.1 一个很有启发性的想法是：S 在每点处的切空间都是定向欧氏空间，因而具有规范测度；所以就能在一个适当的意义上对它积分。例如，如果 $h:U\to\mathbf{R}^d$ 是 S 的一个图，f 是 S 上支集在 U 中的函数，我们可以定义 f 在 S 上的积分为

$$\int_U (f\circ h^{-1})\sqrt{\mathrm{Gram}\left(\frac{\partial h}{\partial u_1},\ \cdots,\ \frac{\partial h}{\partial u_d}\right)}\,du_1\cdots du_d,$$

这是在 $(u_1,\cdots,u_d)\in R^d$ 的 Lebesque 测度下的积分；事实上根据 8.11.6，平方根表示切空间中的"无穷小体积"。我们可通过坐标图的变换来验证这个量的不变性；由于 S 要用好几个坐标图才能覆盖，要建立一个完整的理论就必须利用单位分解。

18.3.7.2 一种实质上等价的方法，是利用定向流形上的积分理论，这时，若仍将 S 的规范测度记作 σ，则 S 上任一函数 f 的积分定义为 $\int_S f\sigma$，其中积分是微分形式 $f\sigma$ 在 S 上的积分（参看 [B-G] 第 205，234 页）。因为地球坐标图在不计零测度集差别时覆盖 S，故按 18.3.5（和 [B-G] 第 209—211 页）对任何函数 f 有：

18.3.7.3

$$\int_S f\sigma = \int_{]0,2\pi[\times]-\pi/2,\pi/2[} f(\cos\theta\cdot\cos\varphi,\ \cos\theta\cdot\sin\varphi,\ \sin\theta)\cos\theta\cdot d\varphi\cdot d\theta.$$

18.3.7.4 附注. S 的测度在 $\mathrm{Is}(S)$ 下是不变的，因为它是从其结构本身得出的；在不计数量因子的差别的条件下，它是 S 上在 $\mathrm{Is}(S)$ 下不变的唯一测度. 这一点可以利用 2.7.4.4 中给出的办法来说明：修改后的测度也仍是在 x 处连续的，因为群 $\mathrm{Is}(S)$ 沿生成切空间 T_xS 的所有方向容有连续子群；而以上结论对所有的 $x\in S$ 均成立.

18.3.8 体积

18.3.8.1 闭集 $D\subset S$ 的**体积**（$d=2$ 时称为**面积**）定义为 $\int_S \chi_D\sigma$，其中 χ_D 是 D 的特征函数. 在 9.12.4.8 中可以看到，S^d 的全体积为 $\alpha(d+1)$.

18.3.8.2 若 S^2 的具有相同端点 $\pm m$ 的两个半大圆在 m 处的单位切向量夹成 α 角(参看 18.1.2.4)，则称含于这两半大圆之间的子集 D 为 S^2 的 α 角**球面弓形**，于是有：

18.3.8.3 D 的面积 $=2\alpha$.

事实上，取以 $\pm m$ 为北极和南极的球面坐标，则根据 18.3.7.3：

$$D\text{的面积}=\int_0^\alpha\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos\theta\cdot d\varphi\cdot d\theta=\int_0^\alpha 2d\varphi=2\alpha.$$

18.3.8.4 Girard 公式(1625 年). 若 S^2 的球面三角形的三个角为 α,β,γ，则该三角形面积等于 $\alpha+\beta+\gamma-\pi$.

关于球面三角形的定义，可见 18.6. 把这个三角形的顶点记为 x,y,z，相应的角记为 α,β,γ；设 D 是以通过 y,z 的大圆为边界且将 x 含于其内部的半球面，在不计零测度集的条件下，D 可分成四个集合 T,A,B,C，其中 T 是所考虑的三角形，而 $T\cup B$ 和 $T\cup C$ 分别是 β 角和 γ 角的球面弓形，$T\cup A$ 与 $A\cup(-T)$ 具有相同的面积，而后者是 α 角的弓形. 因而，三次应用 18.3.8.3 就

有：

$$2\pi - D \text{ 的面积} = T \text{ 的面积} + A \text{ 的面积} + B \text{ 的面积} + C \text{ 的面积}$$
$$= T \text{ 的面积} + [2\alpha - T \text{ 的面积}]$$
$$+ [2\beta - T \text{ 的面积}] + [2\gamma - T \text{ 的面积}].$$

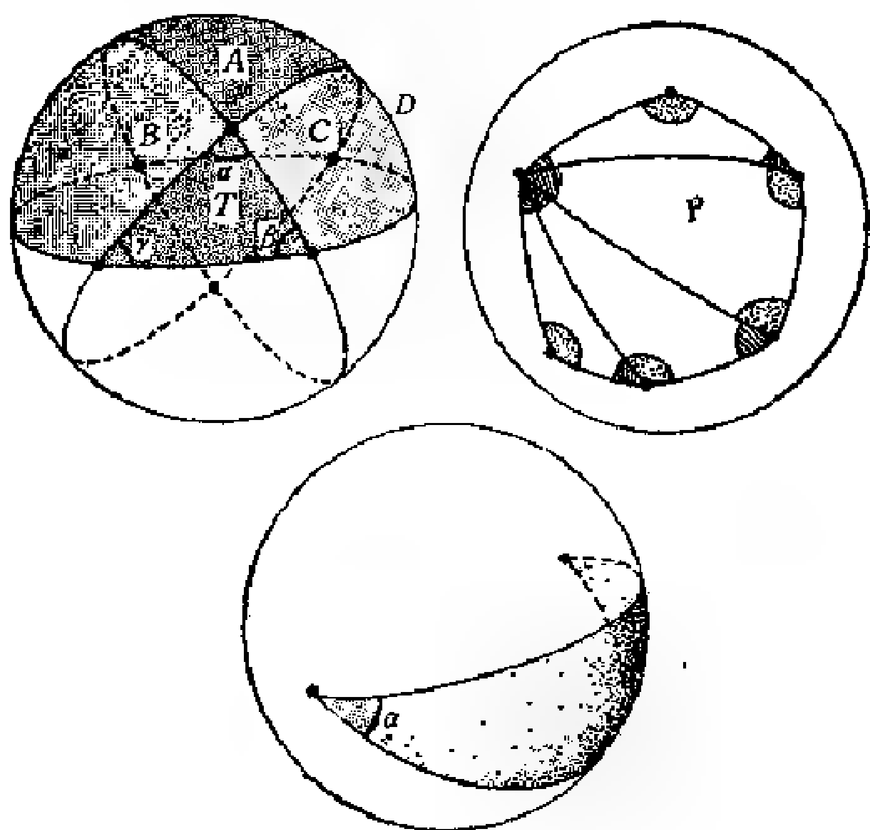


图 18.3.8.

18.3.8.5 推论. 若 P 是有 n 个顶点、内角为 $\alpha_i(i=1,\cdots,n)$ 的球面凸多边形，则有

$$P \text{ 的面积} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i - (n-2)\pi.$$

证明与 10.5.2 相同.

18.3.8.6 附注. 公式 18.3.8.4 无非是对任何二维黎曼流形都成立的一般 Gauss-Bonnet 公式的一个特殊情形. Gauss-Bonnet 公式是说，对三边都为测地线、内角为 α,β,γ 的三角形 T，有 $\alpha+\beta+\gamma-\pi=\int_T K\cdot\sigma$，其中 K 表示流形的曲率，σ 是规范测度；

在此，S 的曲率恒等于 1. 在双曲几何中(参看 19.5.4)，我们还将看到内角为 α, β, γ 的三角形的面积为 $\pi - \alpha - \beta - \gamma$；这个结论对应于双曲平面的曲率为常数 -1 的事实。对曲率为零的欧氏平面，我们很简单地有 10.2.4. 请参阅 12.7.5.2 中的参考文献. Girard 公式特别表明：若三角形 T 的三个角都属于 π 的有理数倍数所成的集合 $\pi\mathbf{Q}$，则 T 的面积也属于 $\pi\mathbf{Q}$. 对于球面 $S^d (d \geqslant 3)$ 的单形剖分，要把每个单形的体积用二面角(这是球面三角形的内角的自然推广)的函数来表示，是一个非常困难的问题；Cheeger 和 Simons 新近提出一个猜想：对 $d \geqslant 3$，存在 S^d 上的单形剖分，其中的单形二面角都属于 $\pi\mathbf{Q}$，但体积不属于 $\pi\mathbf{Q}$.

在 12.11.4.3 中我们曾经提到等周不等式 12.11.1 在 S^d 中推广的问题.

18.4 S 的内蕴度量

18.4.1 在此我们沿用 9.9 中所使用的符号. 在 9.9.4.3 中我们已经看到，由 $\mathbf{R}^{d+1}$ 在 S 上所诱导的距离并不是很好的，实际上它既不是优异的也不是内蕴的（参看 9.9.4.4）. 9.9.8 启发我们应这样处理：对 $x, y \in S$，置 $\overline{xy} = \operatorname{Arc}\cos[(x|y)]$，从而：

18.4.2 定理. 映射 $\overline{\cdots}$：$S \times S \to [0, \pi]$ 是 S 上的度量；这一度量是优异的，因而是内蕴的. 这度量与 $\mathbf{R}^{d+1}$ 在 S 上诱导出相同的自然拓扑. 设 $x, y \in S$：若 $y \neq -x$，则存在唯一的从 x 到 y 的最短通路；若 $y = -x$，则所有的端点为 x 和 $-x$ 的半大圆都是从 x 到 y 的最短通路. 度量 $\overline{\cdots}$ 称为 S 的**内蕴度量**，我们以后不再考虑其他度量.

显然有 $\overline{xy} = 0 \Rightarrow x = y$ 和 $\overline{xy} = \overline{yx}$. x, y, z 不共面时，三角形不等式可从 18.6.10 推出；三点共面时可从 9.9.8.1 推出. 从 18.6.10 和 9.9.8 我们可以推出 $\overline{\cdots}$ 是优异的，并能得到一些关于最短道路的论断.

请参阅 18.11.13 中关于三角形不等式的另一证明.

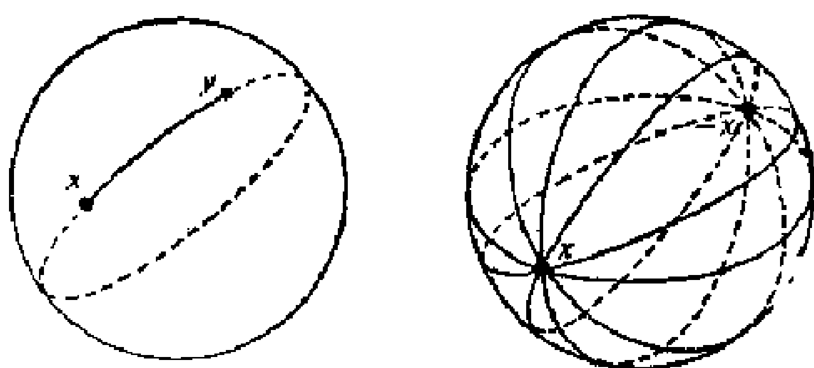


图 18.4.2.

18.4.3 附注. S 的内蕴度量恰好是按照 9.9.7.1 由 $\mathbf{R}^{d+1}$ 诱导的度量所推得的 $\bar{d}$; 我们将证明留给读者: 见 18.11.26.

18.4.4 命题（等距图的不可能性）. 设 U 是 S 的任一开集，必不存在等距映射 $f:U\to\mathbf{R}^d$，即 f 不可能使 $d(f(x),\ f(y))=\overline{xy}$，$\forall\ x,\ y\in U$.

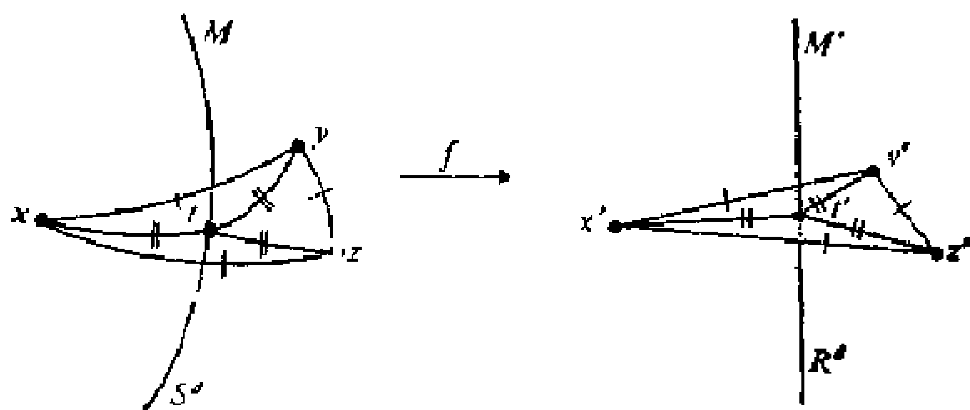


图 18.4.4.

首先注意到，若 $x,\ y,\ z\in S$ 是线性无关的，则集合

$$M=\{m\in S:\ \overline{mx}=\overline{my}=\overline{mz}\}$$

是 S 的 $d-2$ 维子大球面，且垂直于 S 的包含 $x,\ y,\ z$ 的 2 维子球面 N. 设 t 是 $M\cap N$ 中一点，且属于 $x,\ y,\ z$ 所决定的半球面，于是有(例如参看 18.6.8 和 18.11.6)

18.4.4.1 $$\overline{xt}=\inf\{\overline{xm}:m\in M\}.$$

现在设 U 是 S 的一个开集; 根据 18.6.10，存在线性无关的 $x,\ y,$

$z \in S$ 使 $\overline{xy} = \overline{yz} = \overline{zt}$. 利用 18.6.13 的球面三角公式就能把 $\beta = \overline{xt} = \overline{yt} = \overline{zt}$ 明显地表示成 $\overline{xy} = \overline{yz} = \overline{zt} = \alpha$ 的函数，且可以看出 $\alpha < \sqrt{3}\beta$. 现在用 x', y', z', t', m', M' 表示 x, y, z, t, m, M 在 f 下的像，因为 f 是等距，于是首先可知 $x'y'z'$ 是 $\mathbf{R}^d$ 中的等边三角形，继而有

$$M' = \{v \in \mathbf{R}^d : d(v, x') = d(v, y') = d(v, z')\}.$$

根据 t 的极小性质，由于 f 是等距变换，故 t' 必然使 $d(x', t') = \inf\{d(x', v) : v \in M'\}$. 这时，在 $\mathbf{R}^d$ 中利用初等方法即可知 t' 必是 $\{x', y', z'\}$ 的中心，在此情形下 $d(x', y') = \sqrt{3}\, d(x', t')$; 然而 $d(x', t') = \overline{xt} = \beta$, 于是有 $\alpha = \sqrt{3}\beta$, 得出矛盾.

18.4.5 注. 上面的这个命题尤其可从 18.4.7 得出. 另一方面这命题也可与 18.11.7 的讨论相仿地证明；而且，前面的证明是建立在距离极小问题的基础上的.

关于具有比等距弱一点的各种性质的图，见 18.1.5.

18.4.6 **垂直平分性.** 根据 8.3.11 和 9.7.5，对 $x, y \in S$, $x \neq y$, 集合 $\{z \in S : \overline{zx} = \overline{zy}\}$是 S 的 $d-1$ 维大球面，与 k 个线性无关的点等距的点的轨迹，是一个 $d+1-k$ 维子球面.

18.4.7 **球面由度量所表示的特征.** 这里涉及的是 $(S^d, \overline{\cdot\cdot})$ 上的类似于 9.7.4 中对欧氏空间讨论的问题，回答是肯定的; [BL] 第 VII 章中对此有详细的讨论. 在练习 18.11.14 中可找到其主要部分；显然它给出了 18.4.4 的又一证明.

18.5 S 的等距变换群

18.5.1 有了 S 上的一个好的度量后，最紧迫的任务是考虑它的变换群 $\mathrm{Is}(S)$. 事实上原本有两个群要考虑: $\mathrm{Is}(S, \overline{\cdot\cdot})$ 和 $\mathrm{Is}(S, d)$. 然而根据 8.3.11，这两个群是一致的；因而我们可以将它们都写成 $\mathrm{Is}(S)$ 而不致引起歧义. 另一方面，由于 9.8.2，$\mathrm{Is}(S)$ 与

$$\mathrm{Is}_S(\mathbf{R}^{d+1}) = \{f \in \mathrm{Is}(\mathbf{R}^{d+1}) : f(S) = S\}$$

是一致的。最后，正交群 $O(d+1)$ 是含于 $\mathrm{Is}_{S^d}(\mathbf{R}^{d+1})$ 内的：

$$O(d+1)\subset \mathrm{Is}_{S^d}(\mathbf{R}^{d+1}).$$

事实上，这里涉及一个等同关系：

18.5.2　命题. 通过在 S^d 上的限制运算，$O(d+1)$ 自然同构于 $\mathrm{Is}(S^d)$。

设 $f\in \mathrm{Is}(\mathbf{R}^{d+1})$：证明 $f(0)=0$ 即足够了（参看 9.1.3）。而我们的想法是 $d(x,y)=2$，$x,y\in S^d$ 表示了对径点 $y=-x$ 的特征。设任一 $x\in S^d$：$d(f(x),f(-x))=d(x,-x)=2$，于是 $f(-x)=-f(x)$，而且由于 f 是仿射变换（参看 3.5.1），就有：

$$f(0)=f\left(\frac{x+(-x)}{2}\right)=\frac{f(x)+f(-x)}{2}=0.$$

18.5.3　记号. 令 $\mathrm{Is}^+(S^d)=O^+(d+1)$ 在 S 上的限制，$\mathrm{Is}^-(S^d)=O^-(d+1)$ 在 S 上的限制（参看 8.2.1）。

18.5.4　注. 若在某种适当的意义下给定 S 上的一个定向，则 $\mathrm{Is}^+(S)$ 是保持这一定向的等距变换群（参看 18.3.4）。

群 $\mathrm{Is}(S)$（同样 $\mathrm{Is}^+(S)$）是在二点可迁意义下"最大"的群：

18.5.5　命题（二点可迁性）. 设 S 的任意四点满足 $\overline{xy}=\overline{x'y'}$，则存在 $f\in \mathrm{Is}(S)$ 使 $f(x)=x'$ 和 $f(y)=y'$.

关于这个问题，可见 9.1.7。

18.5.5 的无穷小说法是：

18.5.6　命题. 任设 $x,x'\in S$，$\xi\in T_xS$，$\xi'\in T_{x'}S$，且 $\|\xi\|=\|\xi'\|$，则存在 $f\in \mathrm{Is}(S)$ 使 $f(x)=x'$ 和 $f'(\xi)=\xi'$，其中 f' 表示 f：$\mathbf{R}^{d+1}$的切映射（或导映射）。换句话说，$\mathrm{Is}(S)$ 在 S 的单位切向量集合上是可迁的。

对 $d=1$ 或 2 可确切地表述为：

18.5.7　命题. 如果 $d=1$，设任意四点 $x,y,x',y'\in S^1$ 使 $0<\overline{xy}=\overline{x'y'}<\pi$，则在 $\mathrm{Is}(S^1)$ 中唯一存在 f 使 $f(x)=x'$ 和 $f(y)=y'$。如果 $d=2$，设任意四点 $x,y,x',y'\in S^2$ 使 $\overline{xy}=\overline{x'y'}<\pi$，则在 $\mathrm{Is}^+(S^2)$ 中唯一存在 f 使 $f(x)=x'$ 和 $f(y)=y'$.

最后，下面的结果表明了 S 在群 $\mathrm{Is}(S)$ 下的不变度量的唯一

性：

18.5.8 命题. 设 δ 是 S^d 在 $\mathrm{Is}(S^d)=O(d+1)$ 下的不变度量，则存在一个内射 $\varphi:[0,\pi]\to\mathbf{R}$，使 $\forall x,y\in S$ 有 $\delta(x,y)=\varphi(\overline{xy})$。若 δ 又是内蕴的，则存在 $k\in\mathbf{R}_+^*$ 使 $\forall x,y\in S$ 有 $\delta(x,y)=k\overline{xy}$。

18.5.5，18.5.6 和 18.5.7 等结论很容易从 8.1.4 和 8.2.7 得出。为证明 18.5.8 的第一部分，我们固定 $x\in S$，并对所有的 $r\in[0,\pi]$ 选择 $y\in S$ 使 $\overline{xy}=r$。令 $\varphi(r)=\delta(x,y)$，则 $\forall u,v\in S$ 有 $\delta(u,v)=\varphi(\overline{uv})$；因为若 $\overline{uv}=r=\overline{xy}$，则存在 $f\in\mathrm{Is}(S)$（参看 18.5.5）使 $f(x)=u$ 和 $f(y)=v$，由此得出

$$\delta(u,v)=\delta(f(x),f(y))=\delta(x,y)=\varphi(r)=\varphi(\overline{uv}).$$

18.5.8 的第二部分比较难一些，下面我们将它分成几步来证明。

18.5.8.1 对所有满足下列条件的 $r,s,t\in[0,\pi/2]$：$r+t\in[0,\pi]$，$r>s$ 和 $t\in[r-s,r+s]$，我们有 $\varphi(t)\leqslant\varphi(r)+\varphi(s)$。事实上，根据 18.6.10 存在 $x,y,z\in S$ 使 $\overline{xy}=r$，$\overline{xz}=s$ 和 $\overline{yz}=t$，因此

$$\varphi(t)=\varphi(\overline{yz})=\delta(y,z)\leqslant\delta(x,y)+\delta(y,z)$$
$$=\varphi(r)+\varphi(s).$$

18.5.8.2 函数 φ 是连续的. 18.5.8.1 的关系式表明，只需知道 φ 在 0 处连续就够了。然而因为 δ 是内蕴的，故至少存在一条关于 δ 的可求长曲线 f，因此，由 f 的长度的定义（参看 9.9.1）就可知，存在 $x,y\in S$ 使 $\delta(x,y)$ 达到我们所要求的那样小，因而 $\varphi(t)$ 也可达到所要求的那样小。而 18.5.8.1 导致（取 $r=s$）$\forall u\in[0,2t]$ 有 $\varphi(u)\leqslant2\varphi(t)$；这就证明了 φ 在 0 处的连续性。

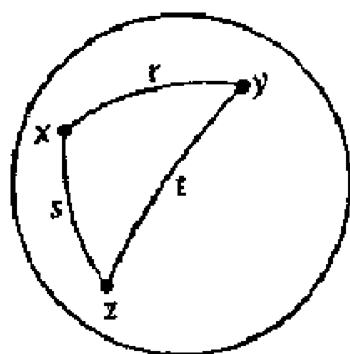


图 18.5.8.1.

18.5.8.3

$$\forall x\in[0,\pi]\ \exists\lambda(x)\in]0,1[\ |\varphi(tx)=t\varphi(x)\forall t\in[0,\lambda(x)].$$

用反证法：倘若对所有的 $n \in \mathbf{N}^*$ 总存在 $s \in]0, 1[$ 使 $\varphi(sx) < s\varphi(x)$，则首先通过反复使用 18.5.8.1 可知，对 $\mathbf{N}$ 中所有不太大的 k，均有 $\varphi(ksx) \leqslant ks\varphi(x)$。此式对所有 n 和所有 k 都成立，φ 又是连续的，故对所有 $t \in [0, 1]$ 有 $\varphi(tx) \leqslant t\varphi(x)$（$\mathbf{Q}$ 在 $\mathbf{R}$ 中的稠密性）。于是，设 $u \in]0, x[$ 使 $\varphi(u) < \frac{u}{x}\varphi(x)$；则由 18.5.8.1 可得出矛盾：

$$\varphi(x) = \varphi(u + (x - u)) \leqslant \varphi(u) + \varphi(x - u)$$
$$< \frac{u}{x}\varphi(x) + \frac{x - u}{x}\varphi(x) = \varphi(x).$$

18.5.8.4 当 x 趋向于 0 时，$\frac{\varphi(x)}{x}$ 具有有限极限 k.

根据 18.5.8.3，或者 $\frac{\varphi(x)}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} k, k \in \mathbf{R}$，或者 $\frac{\varphi(x)}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} \infty$。这后一种情形是不可能产生的；事实上设 f 是关于 δ 的可求长曲线，则（参看 9.9.1）对任何 $N > 0$ 有 f 在 δ 下的长度 $\geqslant f$ 在 $\overline{\cdot\cdot}$ 下的长度与 N 的乘积，而这是不可能的，因为 f 在 $\overline{\cdot\cdot}$ 下的长度是大于 0 的。现在，定义 9.9.4.4 和 18.4.3 的证明技巧表明，关于 δ 和 $\overline{\cdot\cdot}$ 的可求长曲线是相同的，且 f 在 δ 下的长度 $= f$ 在 $\overline{\cdot\cdot}$ 下的长度的 k 倍。由于 δ 是内蕴的，这就是说 $\delta(x, y) = k\overline{xy}\ \forall x, y \in S$（参看 9.9.4.4）。

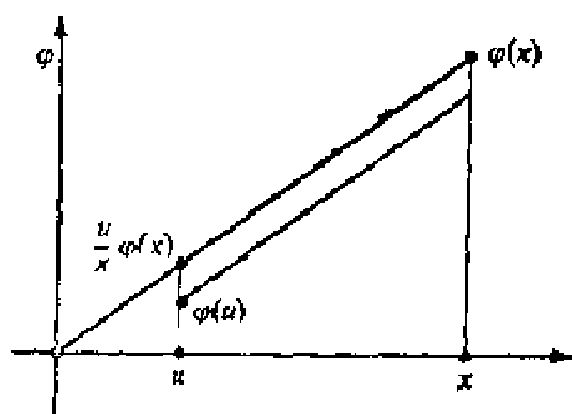


图 18.5.8.3.

18.5.8.5 注. 18.5.8 表明 $\overline{\cdot\cdot}$ 是 S 上良好的度量（不计数量因子的差别）。另外，我们要指出，如果仅仅在 S 上寻找 $\mathrm{Is}(S)$ 下不变的黎曼度量，则唯一性的证明是显然的，因为 18.5.6 表明 $O(d+1)$ 在 S 的单位向量集合上是可迁的，从而这些黎曼结构

都是成比例的.

18.5.9 关于 $Is(S)$ 的迷向群(参看 1.5), 有 $Is_x(S^d) = O_x(\mathbf{R}^{d+1})$, 因而 $Is_x(S)$ 和 $O(d)$ 之间是同构的.

18.5.10 对 $Is(S^1)$ 或 $Is(S^2)$ 的有限子群的研究, 可见 1.8.2. $Is(S^d)$ 的有限子群的分类是另一个内容丰富的研究领域, 建议读者参阅 [WF] 的整个第 III 部分.

18.6 球面三角形

18.6.1 本节的目的研究 S^2 上的球面三角形, 也就是说, 研究 3 维欧氏空间的三面体 (由同一点出发的三条半直线所构造的图形). 特别是, 球面三角研究三面体的三个面角和三个二面角这六个数之间的关系. 这一些关系在天文学, 航行学(航空和航海)和机械学中都是很基本的. 我们将指出导致这样一些应用的途径. 更一般地, 我们可以首先研究球面 S^d $(d \geqslant 3)$ 的三个点, 然而我们通过考虑由这三个点所生成的 2 维子球面, 实际上又回到 $d = 2$ 的情形. 相反, 对由 S^d 的 $d+1$ 个点所成图形是很重要的; 但我们会看到对 $d \geqslant 3$ 的研究要比对 $d = 2$ 的研究困难得多: 对此可见 [CR3] 第 247 页和其中提到的参考文献, 18.3.8.6 中那个没有解决的问题则是表明 $d = 2$ 的情形与 $d \geqslant 3$ 的情形之间难度不同的一个例子.

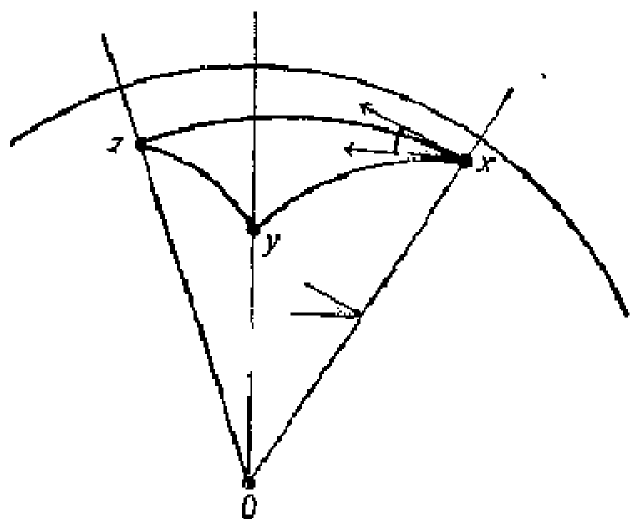


图 18.6.2.

18.6.2 定义. S^2 的三个点所成的三元组 (x, y, z), 若作为 $\mathbf{R}^3$ 的向量时是线性无关的, 则称为 $S = S^2$ 的<u>三角形</u>(或<u>球面三角形</u>). 我们将这三角形记为 $\langle x, y, z \rangle$.

18.6.3 我们不妨将 $\langle x, y, z\rangle$ 跟与它自然地联系在一起的那个有晕影的部分(见 18.3.8.4) 混同起来，并把后者也称为以 x, y, z 为顶点的**球面三角形**.

18.6.4 从图 18.6.2 可看出，三面体 $\{Ox, Oy, Oz\}$ 的二面角等于在 $\langle x, y, z\rangle$ 的顶点处的、与 x, y, z 所确定的大圆相切的单位向量间的夹角. 因此，引进下面的概念和记号就是很自然的：若 x, y 是 S^2(更一般地，任何一个欧氏空间)的两个线性无关向量，我们令

18.6.5
$$x_y = \frac{\lambda}{\|\lambda\|}, \quad \lambda = y - (x|y)x,$$

这就是说 x_y 是在对 $\{x, y\}$ 实行 Schmidt 标准正交化(参看 8.1.4)后继 x 所得的第二个向量.

而且 x_y 是由起点 x 和终点 y 所决定的大圆弧在 x 处的单位切向量. 我们可以很方便地将这一 $x_y \in T_xS$ 看作系于 x 处的一个向量.

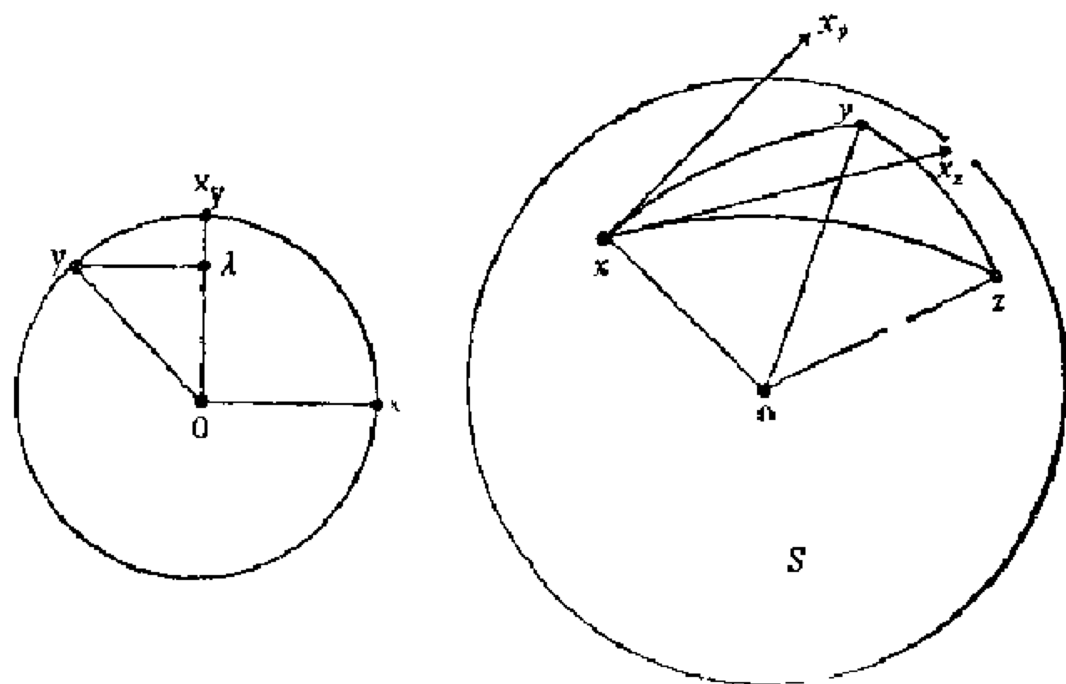


图 18.6.5.

18.6.6 定义和记号. 设 $\langle x, y, z\rangle$ 为球面三角形. 点 x, y, z 称为 $\langle x, y, z\rangle$ 的**顶点**. $\langle x, y, z\rangle$ 的**边**或者是指由 (x, y), (y, z),

(z, x) 决定的大圆弧，或者是指这三边的长度，即三个实数：$a = \overline{yz}$，$b = \overline{zx}$，$c = \overline{xy}$。$\langle x, y, z\rangle$ 的角就是向量的（非有向）夹角（因而是实数 $\in]0, \pi[$）。

$$\alpha = \overline{x_y x_z} = \operatorname{Arc}\cos((x_y | x_z)),\ \beta = \overline{y_z y_x} = \operatorname{Arc}\cos((y_z | y_x)),$$
$$\gamma = \overline{z_x z_y} = \operatorname{Arc}\cos((z_x | z_y)).$$

18.6.7 与欧氏平面三角形的情形相类似，大体上我们希望，6 个数 $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$ 可表示为其中仅仅 3 个数的函数。一个富有启发性的理由（18.6.13.10 中将对它作合乎格式的讨论）是，若给出 α, b, c，则在不计等距差别的情况下，y 和 z 是确定的：事实上若给出 x，$x_y = u$，$x_z = v$ 满足条件 $u, v \in T_x S$ 和 $\overline{uv} = \alpha$，则在以 x 为始点分别与 u 和 v 相切的大圆上取定长度 $b = \overline{xz}$，$c = \overline{xy}$ 后，y 和 z 就完全确定了。然而若我们在 x' 处重新这样做，使 $u', v' \in T_{x'} S$ 和 $\overline{u'v'} = \overline{uv} = \alpha$，则存在一个等距变换，它将 x 映到 x'，将 u, v 映到 u', v'；因而它将 y, z 映到 y', z'，由此即得 $\overline{yz} = \overline{y'z'}$。$a = \overline{yz}$ 确实可以表示为 α, b, c 的函数这一事实，可从 18.6.8 的计算过程看出。整个球面三角的关键仅有两处：一是公式 18.6.8，另一是配极三角形彼此对偶的概念，即 18.6.12。

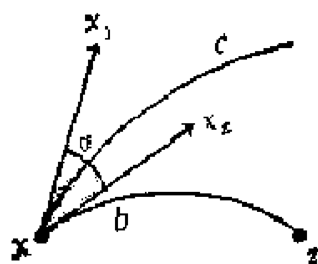


图 18.6.7.

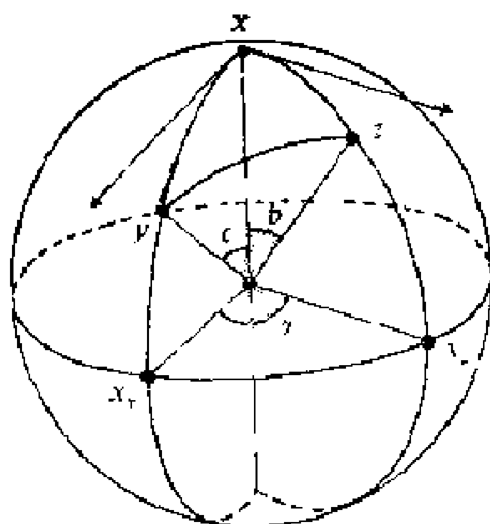


图 18.6.8.

18.6.8 命题（球面三角基本公式）。对任何球面三角形总有

$$\boxed{\cos a = \cos b \cdot \cos c + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos \alpha}$$

令 $u = x_y$ 和 $v = x_z$，由此得出

$$y = \cos c \cdot x + \sin c \cdot u, \quad z = \cos b \cdot x + \sin b \cdot v;$$

因为由 α 的定义知 $(u|v) = \cos\alpha$，又 $(x|u) = (x|v) = 0$，故由 a 的定义我们可求得

$$\cos a = (y|z) = (\cos c \cdot x + \sin c \cdot u | \cos b \cdot x + \sin b \cdot v)$$
$$= \cos b \cdot \cos c + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos\alpha.$$

18.6.9 推论. 在边长 b, c 固定的球面三角形中，边长 a 是 α 的严格增函数。

应该注意到，这一函数的变化区间并不总是$[|b-c|, b+c]$，因为没有任何理由说必定有 $b+c \in]0, \pi[$，例如若 $b-c > \pi/2$，则这一变化区间将是 $]0, 2\pi - 2b[$. 下面的推论明确地说明了这一点。

18.6.10 推论. 对任何球面三角形有

$$|b-c| < a < b+c \quad 和 \quad a+b+c < 2\pi.$$

反之，若 $]0, \pi[$ 中的三个实数 a, b, c 满足$|b-c| < a < b+c$ 和 $a+b+c < 2\pi$，则存在一个边长等于 a, b, c 的球面三角形；在不计等距差别的情况下这个三角形是唯一的.

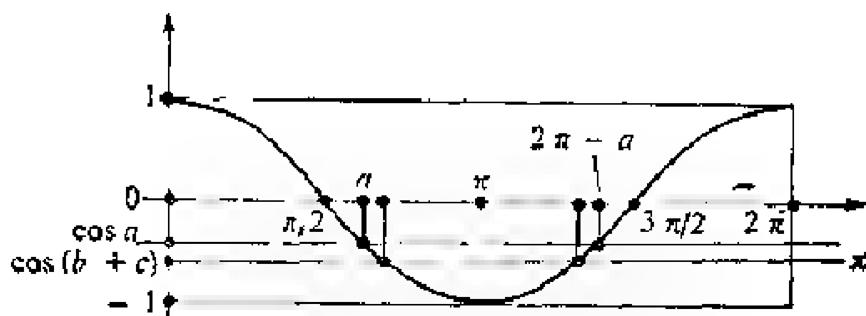


图 18.6.10.

根据 18.6.8，且由于余弦的绝对值 < 1（按照定义 18.6.2，0 和 π 的情形是不予考虑的），因而有

$$\left|\frac{\cos a-\cos b\cdot\cos c}{\sin b\cdot\sin c}\right|<1,$$

它等价于

$$\cos(b+c)<\cos a<\cos(b-c).$$

对 $a, b, c\in\,]0,\pi[$，此式导致 $a<b+c<2\pi-a$。由此首先得出 $a+b+c<2\pi$;然后通过置换有 $b<c+a$ 和 $c<a+b$，由此最后得 $|b-c|<a$。反之，若 a, b, c 满足推论中的两个条件，则有 $\left|\frac{\cos a-\cos b\cdot\cos c}{\sin b\cdot\sin c}\right|<1$，因而存在 $\alpha\in\,]0,\pi[$ 使 $\cos a=\cos b\cdot\cos c+\sin b\cdot\sin c\cdot\cos\alpha$。任取（图 18.6.7）$x\in S$，$u, v\in T_xS$ 使 $\|u\|=\|v\|=1$ 和 $\overline{uv}=\alpha$，则对 18.6.7 中得出的 y, z，按 18.6.8 有 $yz=a$。唯一性可从 18.6.13.10 得出。

18.6.11 实际应用. 公式 18.6.8 有许多实际应用；在天文学中的应用，需要用到下面的大部分公式，参看 [DN]. 关于航空学上的"标高线"的应用，例如可见 [AE] 第 379—386 页. 有关公式说明了最初型号的 2 马力雪铁龙汽车拐弯时的运动状态，见 18.11.16. 最后，作为纯几何的应用，近来球面三角已被用于黎曼几何的不少研究之中，例如可见 [G-K-M] 的 § 6，而推论 18.6.9 将在 Cauchy 引理的证明中起基本的作用：见 18.7。

18.6.12 配极三角极。 若 $\langle x, y, z\rangle$ 是球面三角形，则我们可确定一点 $x'\in S$，它同时是 y, z 所确定的大圆的极点和顶点仍为 x 的同一条边——即在同一半球面内——的极点。实际上我们有三个条件：

$$(x'|y)=(x'|z)=0\ \text{和}\ (x'|x)>0$$

（根据定义 18.6.12，$(x'|x)=0$ 的情形不予考虑）。由此可得

18.6.12.1 命题和定义. 设 $\langle x, y, z\rangle$ 是球面三角形，则由条件

$$\text{POL}\begin{cases}(x'|y)=(x'|z)=0,\ (x'|x)>0,\\(y'|z)=(y'|x)=0,\ (y'|y)>0,\\(z'|x)=(z'|y)=0,\ (z'|z)>0\end{cases}$$

所确定的三元组 $\langle x', y', z'\rangle$ 是一个球面三角形 $\langle x', y', z'\rangle$，记为 $\langle x, y, z\rangle'$，称为 $\langle x, y, z\rangle$ 的**配极三角形**。

事实上，倘若 x', y', z' 是线性相关的，那么，比如说就有 $z\in \mathbf{R}\cdot x' + \mathbf{R}\cdot y'$，这就导出 $(z|z)=0$。

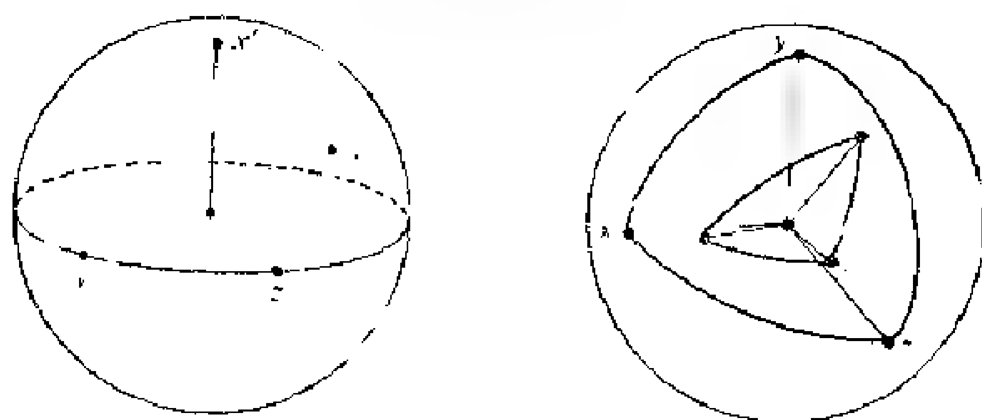


图 18.6.12.1.

18.6.12.2 命题. 对任何球面三角形 $\langle x, y, z\rangle$，有 $\langle x', y', z'\rangle' = \langle x, y, z\rangle$，也就是说 $\langle x, y, z\rangle$ 的配极三角形的配极三角形仍是 $\langle x, y, z\rangle$。若 $\langle x, y, z\rangle'$ 的六个元素记为 $a', b', c', \alpha', \beta', \gamma'$，则有

$$a+\alpha' = b+\beta' = c+\gamma' = a'+\alpha = b'+\beta$$
$$= c'+\gamma = \pi.$$

这种对合的对偶性可由公理系 POL 的对称性看出。所要证明的六个关系式，其中三个可以通过对偶性由另外三个推出。因此仅需证明，比如说，$a'+\alpha=\pi$。在垂直于 x 的平面内作一图，画上四个向量 $y', z', x_y=u, x_z=v$（也画有 y, z 在这平面上的射影，并在字母外加了圈：ⓨ，ⓩ，以及 ⓧ $=0$）。于是有条件

$$(z'|u)=0,\ (y'|v)=0,\ (v|z')>0,\ (y'|u)>0,$$

由此容易得出(例如可见 8.7.5.3)

$$\overline{y'z'}+\overline{uv}=\pi.$$

18.6.12.3 推论. 对任何球面三角形总有:

$$\alpha+\beta+\gamma>\pi,\quad \alpha+\pi>\beta+\gamma,$$
$$\beta+\pi>\gamma+\alpha,\quad \gamma+\pi>\alpha+\beta.$$

18.6.12.4 注. 这样，我们就看出球面几何与欧氏平面几何是根本不同的，因为在欧氏几何中三角形三内角之和恒等于 π！我们已在18.3.8.4中看到，角盈 $\sigma=\alpha+\beta+\gamma-\pi$ 恰好是 $\langle x, y, z\rangle$ 的面积。关于三内角之和小于 π 的几何学，可见19.5.4。

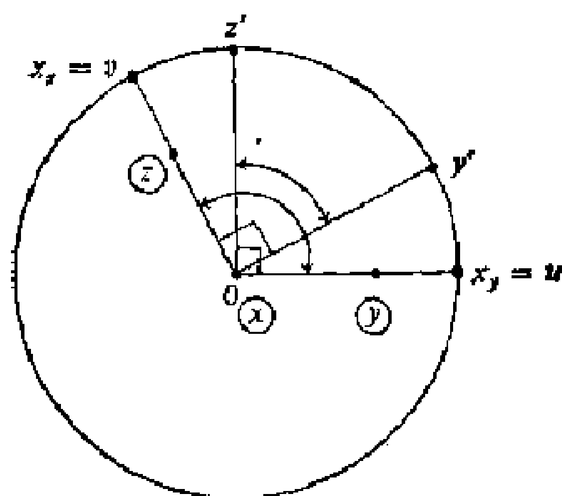


图 18.6.12.2.

18.6.13 球面三角公式. 在下面的公式的汇编中，那些可从其中一个公式通过 (a, b, c)，(α, β, γ) 的置换而得到的公式通常就不再列入，而且，我们令（对类似的情形可参看10.3和18.11.9）：

18.6.13.1

$$\begin{cases} p=\dfrac{a+b+c}{2},\ P=\dfrac{\alpha+\beta+\gamma}{2},\ \delta=\dfrac{1}{2}|\det(x, y, z)|, \\ \Delta=\dfrac{1}{2}|\det(x', y', z')|, \sigma=\alpha+\beta+\gamma-\pi=2P-\pi. \end{cases}$$

于是，对任何球面三角形有：

18.6.13.2 $\delta=\sqrt{\sin p\sin(p-a)\sin(p-b)\sin(p-c)}$,

$\Delta=\sqrt{\sin P\sin(P-\alpha)\sin(P-\beta)\sin(P-\gamma)}$

18.6.13.3 $\operatorname{tg}\dfrac{\sigma}{4}=\sqrt{\operatorname{tg}\dfrac{p}{2}\operatorname{tg}\dfrac{p-a}{2}\operatorname{tg}\dfrac{p-b}{2}\operatorname{tg}\dfrac{p-c}{2}}$

18.6.13.4 $\dfrac{\sin a}{\sin\alpha}=\dfrac{\sin b}{\sin\beta}=\dfrac{\sin c}{\sin\gamma}=\dfrac{\delta}{\Delta}$

18.6.13.5 $\delta=\dfrac{1}{2}\sin b\sin c\sin\alpha$, $\Delta=\dfrac{1}{2}\sin\beta\sin\gamma\sin a$

18.6.13.6 $\operatorname{tg}\frac{\beta-\gamma}{2}=\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\frac{\sin\frac{b-c}{2}}{\sin\frac{b+c}{2}}$,

$$\operatorname{tg}\frac{\beta+\gamma}{2}=\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\frac{\cos\frac{b-c}{2}}{\cos\frac{b+c}{2}}$$

18.6.13.7 $\cos\alpha=\frac{\cos a-\cos b\cos c}{\sin b\sin c}$,

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{\sin(p-b)\sin(p-c)}{\sin p\sin(p-a)}}$$

证明 18.6.13.7 的第一个公式就是 18.6.8；第三个公式可借助

$$\cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{\cos\alpha+1}{2},\quad \sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{2}$$

和三角学中弧的加法公式的传统做法推出。为证明 18.6.13.5（其第二式要用到第一式和 18.6.12.2），我们取 $\mathbf{R}^3$ 的正交标架 $\{e_1, e_2, e_3\}$，使 $e_1=x$，$e_2=x_y$，$e_3=e_1\wedge e_2$。在这一标架中，x，y，z 的坐标是容易求出的（参看 18.6.8 的证明），且有

$$\det(x,y,z)=\begin{vmatrix}1 & \cos c & \cos b\\ 0 & \sin c & \cos\alpha\sin b\\ 0 & 0 & \sin\alpha\sin b\end{vmatrix}=\sin\alpha\ \sin b\ \sin c.$$

18.6.13.2 的第一式只需利用 Gram 行列式的技巧（参看 8.11.5）：

$$4\delta^2=\begin{vmatrix}(x|x) & (x|y) & (x|z)\\ (y|x) & (y|y) & (y|z)\\ (z|x) & (z|y) & (z|z)\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & \cos c & \cos b\\ \cos c & 1 & \cos a\\ \cos b & \cos a & 1\end{vmatrix};$$

展开这一行列式并利用弧的加法公式，即可求得 18.6.13.2，其第二式则可通过配极三角形得到（参看 18.6.12.2）。

有了 18.6.13.5 以后，公式 18.6.13.4 是很显然的，公式

18.6.13.6 和 18.6.13.3 可利用 18.6.13.7 得出；18.6.13.3 的证明比较长，但仅需用到常用的三角公式。

18.6.13.8 附注。 公式 18.6.13.2 至 18.6.13.7 在位置天文学中是经常用到的，详见［DN］或［AE］第 367 页及以后几页。需要特别留意的是，$\sin\alpha$ 并不能决定 α，这与 $\cos\alpha$ 或 $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$，$\cos\frac{\alpha}{2}$，$\sin\frac{\alpha}{2}$ 是不同的，其原因在于 $\alpha\in\,]0,\pi[$。写成 $\frac{\cdot}{2}$ 的公式的最大优点就在于此（在天文学中称之为"二级"公式，而写成 $\frac{\cdot}{4}$ 的公式，例如 18.6.13.3，则称为"三级"公式）。公式 18.6.13.3 也不比 18.6.13.2 差，它使我们想起把欧氏三角形面积表示成三边的函数的公式 10.3.3。关于这一点，18.11.9 是一个很有意义的练习。

18.6.13.7 的第一个公式是 Gauss 首先得到的，公式 18.6.13.6 称为"Néper 同类式"，而公式 18.6.13.3 则是由 Simon Lhuillier 得出的.

18.6.13.9 推论。 $b=c$ 的充分必要条件是 $\beta=\gamma$（试与 10.2.2 比较）。

对其证明需注意：用 18.6.13.7 而不要用 18.6.13.4！例如一个球面三角形是等边的（即 $a=b=c$），当且仅当它的三个角是相等的（$\alpha=\beta=\gamma$）。但与平面的情形不同，这三个角的公共值可以在整个 $]\pi/3,\pi[$ 中变动：详细讨论可见 18.11.11，应用可见 18.4.4。

18.6.13.10 推论（球面三角形的全等）。设 $\langle x,y,z\rangle$，$\langle\bar{x},\bar{y},\bar{z}\rangle$ 是两个球面三角形，它们的元素分别为 $a,b,c,\alpha,\beta,\gamma$ 和 $\bar{a},\bar{b},\bar{c},\bar{\alpha},\bar{\beta},\bar{\gamma}$，则下面五个条件是等价的：

(i) $\exists f\in \operatorname{Is}(S)\mid f(x)=\bar{x},\ f(y)=\bar{y},\ f(z)=\bar{z}$；

(ii) $a=\bar{a},\ b=\bar{b},\ c=\bar{c}$；

(iii) $\alpha=\bar{\alpha},\ b=\bar{b},\ c=\bar{c}$；

(iv) $a=\bar{a},\ \beta=\bar{\beta},\ \gamma=\bar{\gamma}$；

(v) $\alpha=\bar{\alpha},\ \beta=\bar{\beta},\ \gamma=\bar{\gamma}$。

显然由 (i) 可推出其他四个条件。引进配极三角形 (参看 18.6.12.1 和 18.6.12.2) 就可证明 (ii) 同 (v) 以及 (iii) 同 (iv) 的等价性。因而仅需证明例如 (iii) ⇒ (i)，而这又只需利用 18.6.7 的想法：若令

$$u = x_y,\ v = x_z,\ \bar{u} = \bar{x}_{\bar{y}},\ \bar{v} = \bar{x}_{\bar{z}},$$

则从 18.6.7 可知，存在 $f \in \mathrm{Is}(S)$ 使

$$f(x) = \bar{x},\ f'(u) = \bar{u},\ f'(v) = \bar{v},$$

这是因为由假设条件 $\alpha = \bar{\alpha}$ 有 $\overline{uv} = \overline{\bar{u}\bar{v}}$。然而由于

$$f \in \mathrm{Is}(S),\ \overline{xy} = \overline{\bar{x}\bar{y}},\ \overline{xz} = \overline{\bar{x}\bar{z}},$$

故有 $f(y) = \bar{y}$ 和 $f(z) = \bar{z}$。

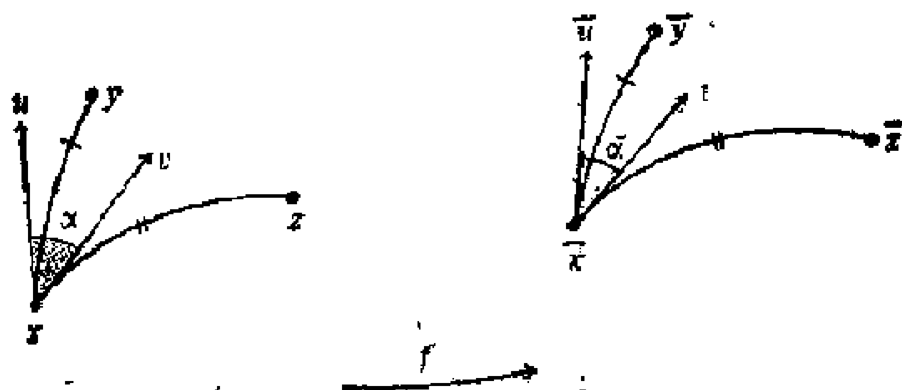


图 18.6.13.

18.6.13.11 注

(i) 情形 (v) 同欧氏平面几何是完全不同的，在欧氏几何中三个角对应相等的两个三角形仅仅是相似的。

(ii) 如同 10.2.6 中那样，作为一个练习，可以讨论下列条件下球面三角形的存在性和唯一性：给定 (a, b, γ) 或 (a, b, α) 或 (α, β, γ)。

(iii) 对直角球面三角形或直边球面三角形(即其中有一条边等于 $\pi/2$) 的讨论可见 18.11.11。

(iv) 在 18.11.10 中可以看到欧氏平面几何中所谓"容有已知角的弧"定理(10.9.3)的一个推广。

(v) 在 [DX] 第 203 页及以后几页中，可以看到将 $\mathbf{R}^3$ 在 $\mathbf{C}^3$ 中复化而得到的球面三角学的研究。

18.6.14 练习题目. 一个总题目是"任取第 10 章中的一段讨论，看看类似的问题能否言之成理地在 S^2 上提出；如果能行，试解决这个问题，并将所得的结果与平面上的结果相比较"。

在 18.4.4 中我们已经遇到过这类问题。在此读者可试将 10.3.10，10.4.1，10.4.3，10.4.5 等结果推广到 S^2 上；也可参看 18.11.5.

18.6.15 附注. 在 19.3.4 中可以看到双曲几何中与 18.6.13 相对应的结果。

18.6.16 注. 在 S^2 上也可以讨论一些性质很不相同的问题，例如可见 [FT1] 的第 IV 章和 [BL] 的第 VIII 章；球面上给定的若干点的最佳排列问题尚在探索之中，例如可见 [FT1] 第 171 页，也可看 C. A. Rogers, Packing and Covering, Cambridge University Press.

18.7 凸球面多边形；Cauchy 引理

这一节是为 Cauchy 引理而安排的，这个引理是关于 $\mathbf{R}^3$ 的凸多面体刚性的 Cauchy 定理 12.8.1 的两个关键之一。在整个这节中我们设 $S = S^2 \subset \mathbf{R}^3$. Cauchy 引理的证明很精巧，它实质上是在命题 18.7.7 的基础上进行的。

18.7.0 我们称 S 的这样一个子集为半球面，它是 S 和一个跟过原点的平面相联系的半空间的交。

18.7.1 定义. 我们称 S 的这样一个子集 P 为凸球面多边形（简称为多边形），它是 S 的半球面的有限交，且使 $\mathring{P} \neq \emptyset$ 和 $P \cap (-P) = \emptyset$（即 P 决不含有两个对径点）。

例如，一个球面三角形自然地就是这样的多边形，参看 18.6.3. 为了能定义 P 的边和顶点，我们要利用关于凸多面体的一些结果。

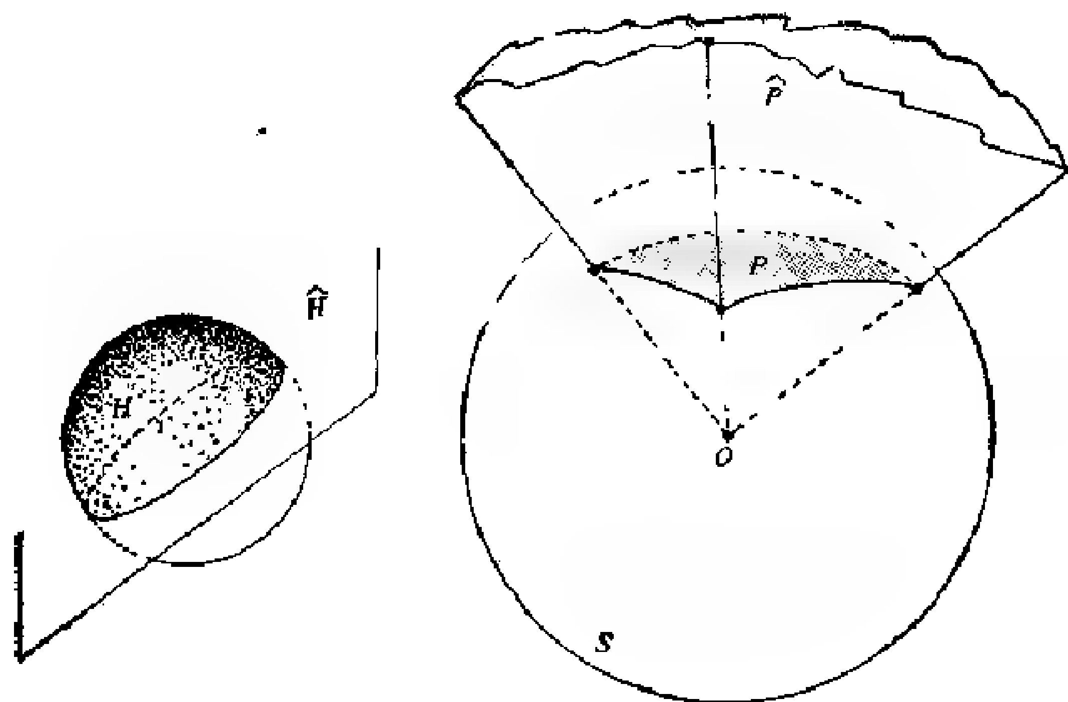


图 18.7.1.

18.7.2 对 S 的任一半球面 H，记H所生成的 $\mathbf{R}^3$ 的半空间为 $\hat{H}$；若 $P=\bigcap_i H_i$，则令 $\hat{P}=\bigcap_i \hat{H}_i$，于是 $\hat{P}$ 是凸多面体，实际上它是以O为顶点的凸锥．既然 $\mathring{P}\neq\varnothing$，故同样有 $\mathring{\hat{P}}\neq\varnothing$，因而我们可应用 12.1.5 和 12.1.8：$\hat{P}$ 具有完全确定的面和棱．因为 $P\cap(-P)=\varnothing$，故这些棱和面分别是过O点的平面内从O出发的半直线和扇形．

18.7.3 **定义**．P的顶点是S与$\hat{P}$的棱之交，P的边是S与$\hat{P}$的面之交．若多边形有三个顶点，则称为三角形．

根据 12.1.12，我们可以看到，P的每一条边恰好含有两个顶点，且每一个顶点恰好属于两条边．因而我们可对P的顶点加以编号，设为 $(x_i)_{i=1,\cdots,n}$，使得连号的两个顶点在同一条边上．在下文中我们总假设采用这样的写法，在这种写法下，P完全由其顶点决定．顶点数与边数是相等的．对S的多边形，我们可像球面三角形那样，利用自然的记法引入角和边长：

18.7.4 **定义和记号**．凸球面多边形 $P=(x_i)_{i=1,\cdots,n}$ 的边长是实数 $a_i=\overline{x_ix_{i+1}}$，$i=1,\cdots,n$，并约定 $x_{n+1}=x_1$，即 $a_n=\overline{x_nx_1}$，

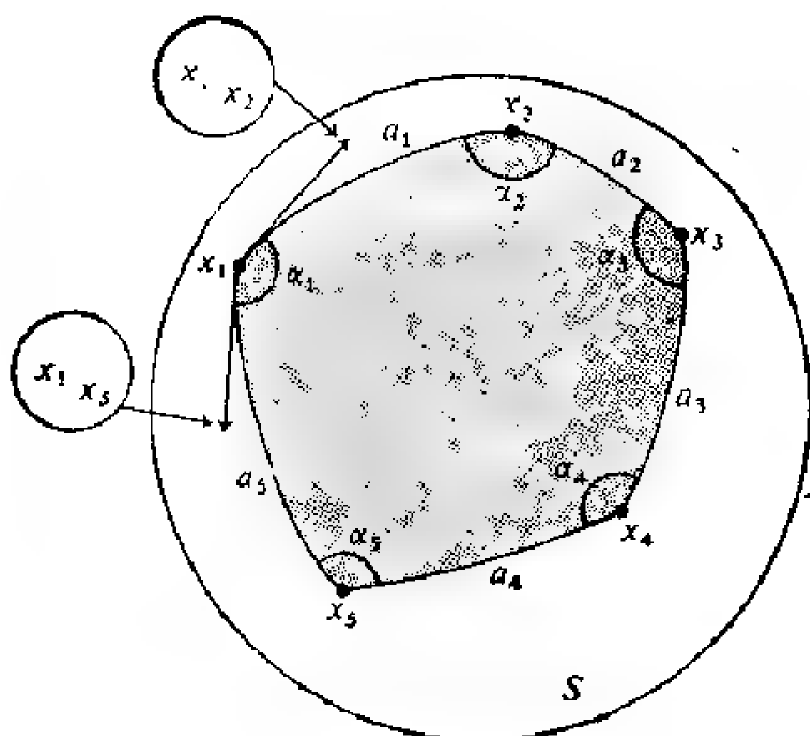


图 18.7.3.

P的角是

$$\alpha_i=\overline{x_ix_{i-1},x_ix_{i+1}}\ (i=1,\cdots,n,\ x_{n+1}=x_1,\ x_0=x_n).$$

18.7.5 命题. 设 x，y 是P的不属于同一条边的两个顶点，γ是连结它们的大圆弧（这弧是唯一的，因为根据18.7.1有 $y\neq -x$)，则γ包含在P内且 $P=P'\cup P''$，其中P'，P'' 是两个以γ为公共边且 $P'\cap P''=\gamma$ 的多边形。

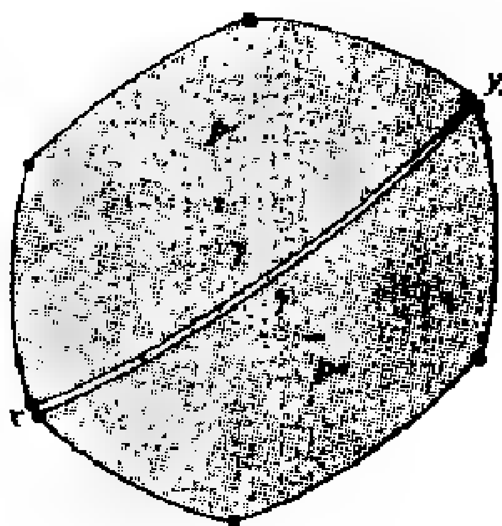


图 18.7.5.

显然$\gamma\subset P$，因为，若x，$y\in$半球面H，又由$y\neq -x$，可知 $\gamma\subset H$。至于P 和P''，它们定义为 $P\cap H'$ 和 $P\cap H''$，其中H' 和H''是γ所决定的二个半球面。

18.7.6 现在设 $P, \bar{P}$ 是顶点分别为 $(x_i)_{i=1,\cdots,n}$ 和 $(\bar{x}_i)_{i=1,\cdots,n}$ 的两个多边形（在这个已知条件中，我们人为地规定了顶点的编号次序，或者说我们规定了 P 和 $\bar{P}$ 的顶点间的一个双射，而这双射保留两个顶点属于同一条边的性态）. P 和 $\bar{P}$ 的边和角当然就分别记为 $a_i, \bar{a}_i, \alpha_i, \bar{\alpha}_i$ $(i=1,\cdots,n)$. Cauchy 引理 18.7.16 是下述命题的简单推论.

18.7.7 命题. 如果 $\forall i=1,\cdots,n-1$ 有 $a_i=\bar{a}_i$，且 $\forall i=2,\cdots,n-1$ 有 $\alpha_i \leqslant \bar{\alpha}_i$，则 $a_n \leqslant \bar{a}_n$；而且，若存在 $i\in\{2,\cdots,n-1\}$ 使 $\alpha_i<\bar{\alpha}_i$，则 $a_n<\bar{a}_n$.

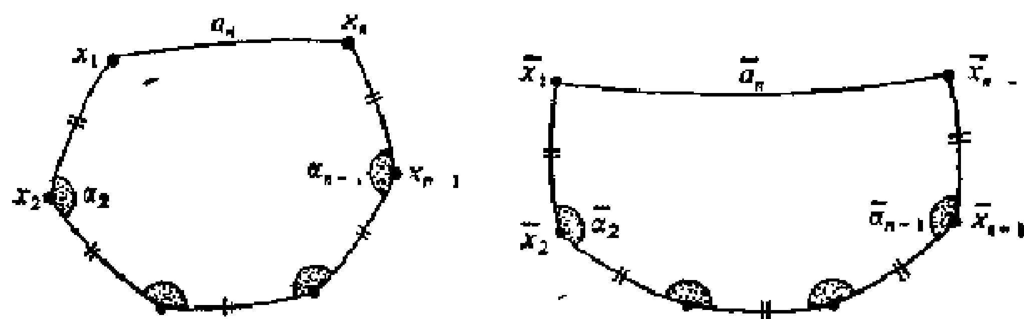


图 18.7.7.

18.7.8 这个结论是相当直观的：如果我们将一个多边形的角都增大，而使它的边除一条以外都保持长度不变，那么最末那条边势必要增长. 然而，即使是对欧氏平面的四边形，读者也会看到这个结论的证明并不是那么显然的.

18.7.9 引理. $n=3$ 时命题 18.7.7 成立.

事实上，这时它就是推论 18.6.9. 而且，在下述特殊情形下从 $n-1$ 到 n 的递推是容易的：

18.7.10 引理. 如果 $n-1$ 时命题 18.7.7 成立，那么命题对任何满足下述条件的 n 边形偶 $P, \bar{P}$ 也成立：存在 $i\in\{2,\cdots,n-1\}$ 使 $\alpha_i=\bar{\alpha}_i$.

事实上，将 18.7.5 应用于端点分别为 x_{i-1}, x_{i+1} 和 $\bar{x}_{i-1}, \bar{x}_{i+1}$ 的大圆弧 $\gamma_i, \bar{\gamma}_i$，就得到两个 $n-1$ 边形 $P', \bar{P}'$ 和两个三角形 $P'', \bar{P}''$. 根据 18.6.13.10，这两个三角形是"全等的"，特别有 $\overline{x_{i-1}x_{i+1}}=$

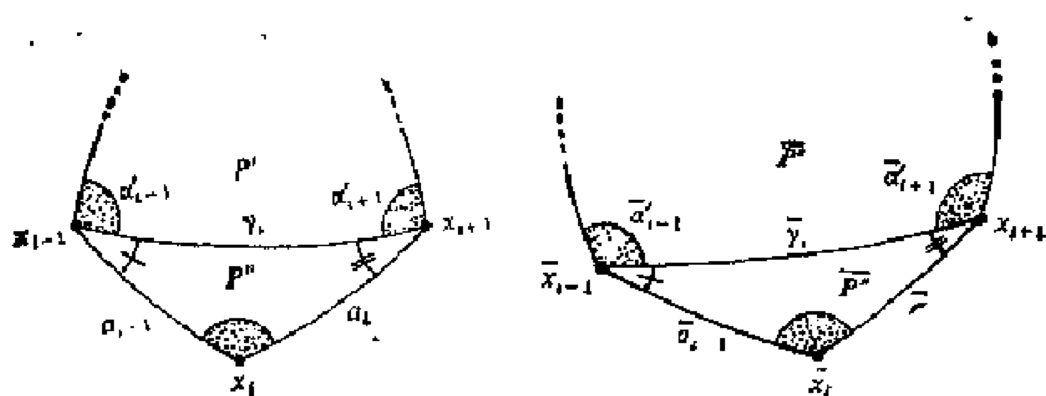


图 18.7.10.

$\overline{\bar{x}_{i-1}\bar{x}_{i+1}}$，而且它们在 x_{i-1}，x_{i+1}，$\bar{x}_{i-1}$，$\bar{x}_{i+1}$ 处的角分别相等。由此对 P' 和 $\bar{P}'$ 在顶点 x_{i-1}，x_{i+1}，$\bar{x}_{i-1}$，$\bar{x}_{i+1}$ 处的角 α'_{i-1}，α'_{i+1}，$\bar{\alpha}'_{i-1}$，$\bar{\alpha}'_{i+1}$ 得出不等式 $\alpha'_{i-1}\leqslant\bar{\alpha}'_{i-1}$ 和 $\alpha'_{i+1}\leqslant\bar{\alpha}'_{i+1}$。因而 P'，$\bar{P}'$ 满足 18.7.7 的假设，由此引理得证。

现在用归纳法来证明 18.7.7，其中仅有一处应特别注意不要走入歧途。

18.7.11　18.7.7 的证明. 证明的思想是将 P 在 x_{n-1} 处的角 α_{n-1} 增大到等于 α_{n-1}，而保持边长不变；这样我们就得到一个新的多边形 P'，其顶点为 x_1，$\cdots$，x_{n-1}，x'_n 边长为 a_1，$\cdots$，a_{n-1}，$a'_n=\overline{x'_n x_1}$，在 $x_2,\cdots,x_{n-2},x_{n-1}$ 处的角分别等于 $\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-1},\alpha'_{n-1}$。但遗憾的是我们没有任何理由可说这新的多边形 P' 一定是凸的，正如图 18.7.11 所表明的那样。因此下面分两种情形考虑。

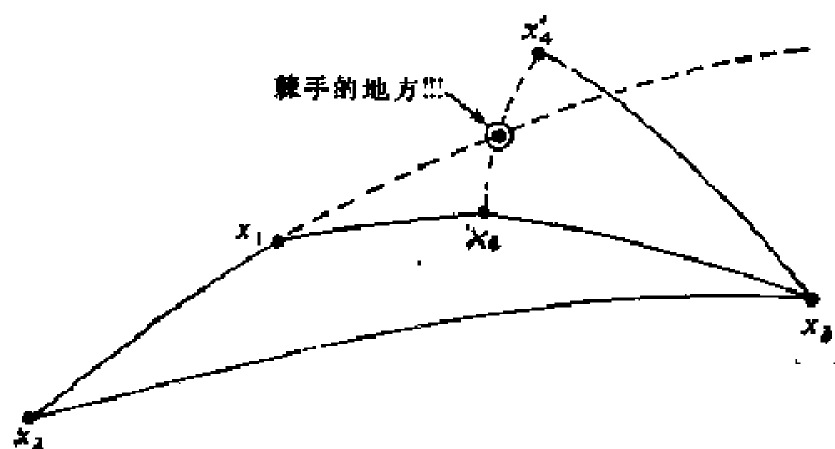
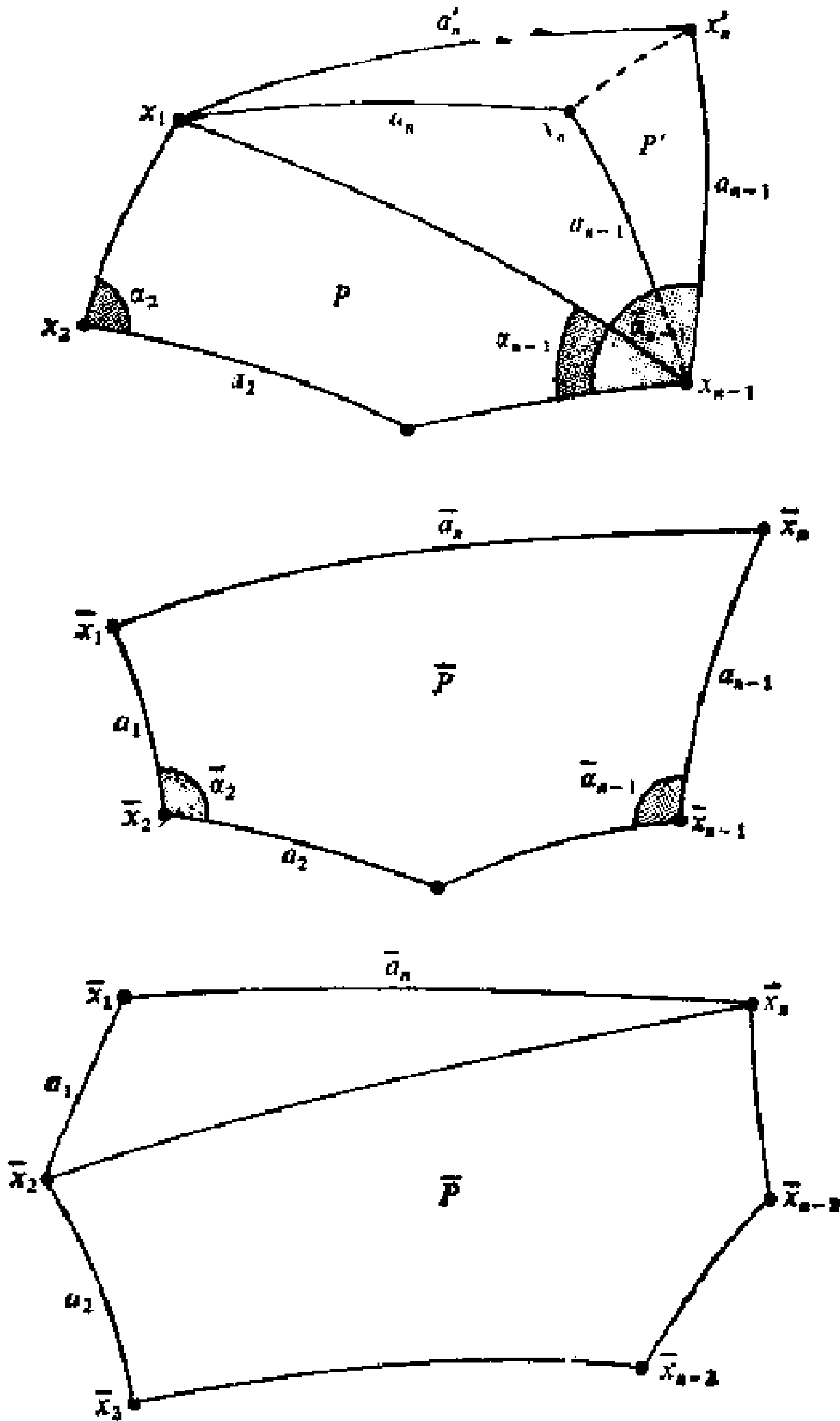


图 18.7.11.

18.7.12 第一种情形：P′ 是凸的：由于18.7.5，我们可将**18.7.9**应用于两个三角形 x_1, x_{n-1}, x_n 和 x_1, x_{n-1}, x'_n，由此得出

$$a_n = x_1x_n < x_1x'_n，且若\ \alpha_{n-1} < \bar{\alpha}_{n-1}，则\ x_1x_n < x_1x'_n.$$

然后应用归纳假设和引理18.7.10于多边形 P' 和 $\bar{P}$，根据作法，P'



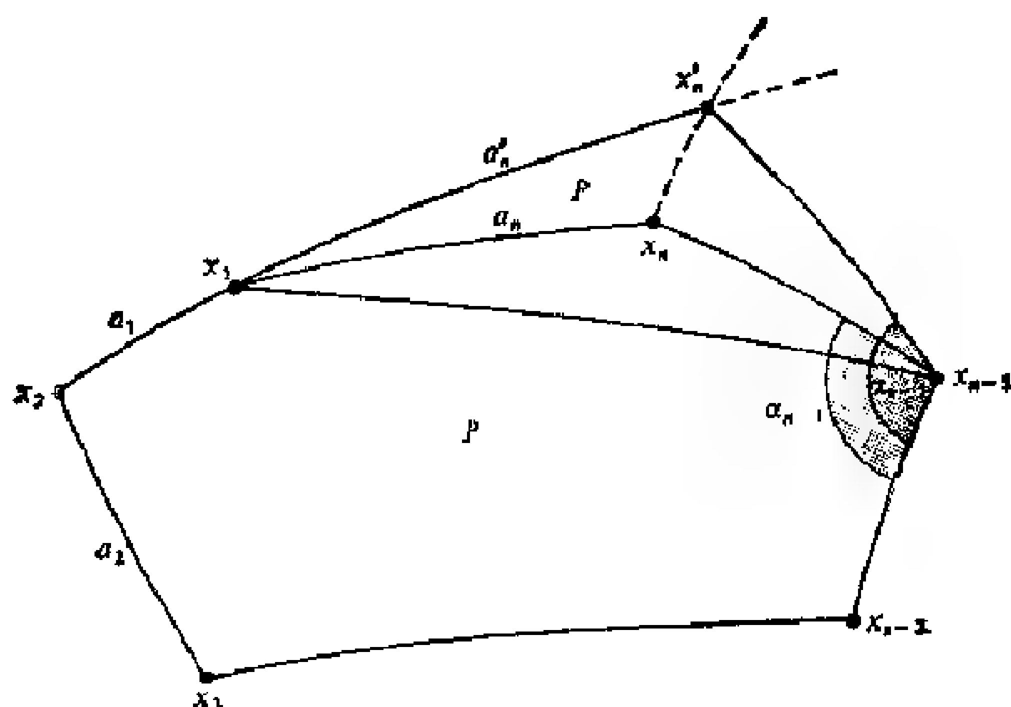


图 18.7.13.

和 $\bar{P}$ 在 x_{n-1}, $\bar{x}_{n-1}$ 处有相等的角,由此得出

$$x_1x_n' \leqslant \bar{x}_1\bar{x}_n = a_n.$$

这就完成了第一种情形的证明.

18.7.13 第二种情形: P′ 不是凸的. 在此情形下,当我们为将 α_{n-1} 增大到 $\bar{\alpha}_{n-1}$ 而将圆弧 $x_{n-1}x_n$ 绕 x_{n-1} 旋转时,存在一个 α_{n-1} 的值 α'_{n-1},它最先使 P' 不再是凸多边形. 因而有 $\alpha_{n-1} < \alpha'_{n-1} < \bar{\alpha}_{n-1}$.

设 x_n' 是这样得到的极限点,则按作法的假设,点 x_n' 属于 x_2 和 x_1 所确定的大圆. 于是有

$$\overline{x_1x_n'} = \overline{x_2x_n'} - \overline{x_1x_2}.$$

利用 18.6.10 和 18.7.5,即可求得

$$\bar{a}_n = \overline{\bar{x}_1\bar{x}_n} \geqslant \overline{\bar{x}_2\bar{x}_n} - \overline{\bar{x}_1\bar{x}_2} = \overline{\bar{x}_2\bar{x}_n} - \overline{x_1x_2}.$$

然后经由 18.7.5 将归纳假设应用于凸多边形 $(x_2, x_3, \cdots, x_{n-1}, x_n)$ 和 $(\bar{x}_2, \bar{x}_3, \cdots, \bar{x}_{n-1}, \bar{x}_n)$,就得出

$$\overline{\bar{x}_2\bar{x}_n} \geqslant x_2x_n'.$$

最后,由于有 18.7.5,可将 18.7.9 用于三角形 (x_1, x_n, x_{n-1}) 和

(x_1, x'_n, x_{n-1})，从而得到

$$\overline{x_1x'_n} > \overline{x_1x_n}.$$

将所得到的等式和不等式依次排列即得

$$\bar{a}_n \geq \overline{\bar{x}_2\bar{x}_n} - \overline{x_1x_2} \geq \overline{x_2x'_n} - \overline{x_1x_2} \geq \overline{x_1x'_n} > \overline{x_1x_n} = a_n.$$

18.7.14 我们总假设两个多边形 P，$\bar{P}$ 是如 18.7.6 中所述的，也就是说它们具有相同的边数，且顶点之间有一个约定的双射，所用记号也与 18.7.6 一样。

18.7.15 记号和定义. 对 $i = 1, \cdots, n$，令

$$\operatorname{signe}(i) = \begin{cases} + & \text{若 } \alpha_i > \bar{\alpha}_i, \\ 0 & \text{若 } \alpha_i = \bar{\alpha}_i, \\ - & \text{若 } \alpha_i < \bar{\alpha}_i. \end{cases}$$

使 $\operatorname{signe}(i)\operatorname{signe}(i+1) = -1$ 的 $i \in \{1, \cdots, n\}$ 的基数称为 $(P, \bar{P})$ 的***严格变号数***（约定 $\operatorname{signe}(n+1) = \operatorname{signe}(1)$）。

18.7.16 定理（"Cauchy 引理"）. 若 P，$\bar{P}$ 使 $a_i = \bar{a}_i\ \forall i = 1, \cdots, n$，则或者对 $i = 1, \cdots, n$ 成立 $\alpha_i = \bar{\alpha}_i$，或者严格变号数 ≥ 4。

由于严格变号数是偶数，所以我们只需排除它等于 2 的情形

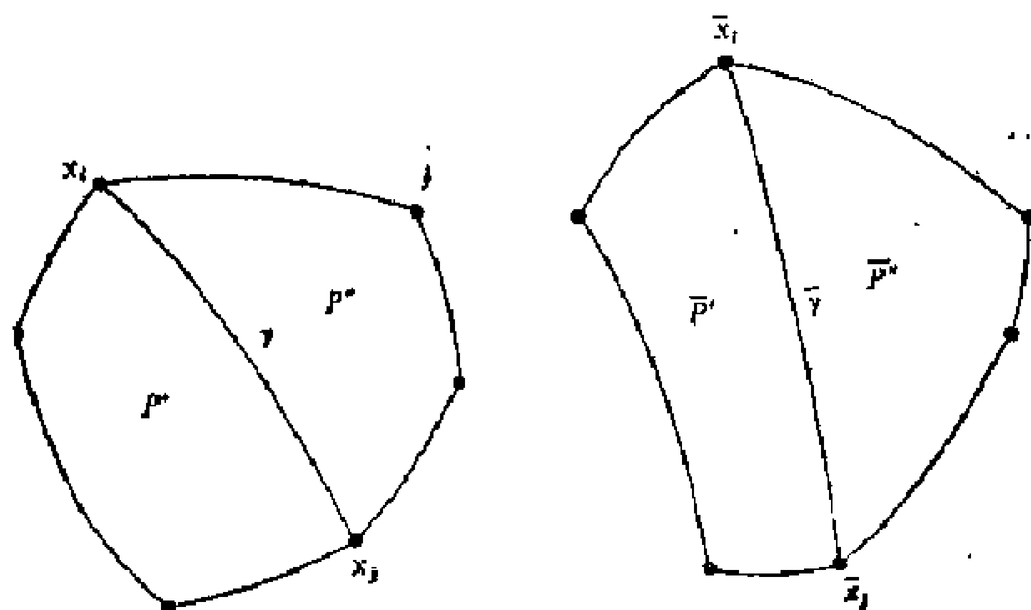


图 18.7.16.

即可，为此我们仍用反证法．根据假设，存在一些不相邻的 $i, j\in\{1,\cdots,n\}$，使得比如说对 $k\in\{i+1,\cdots,j-1\}$ 有 $\alpha_k\geqslant\bar{\alpha}_k$，且至少有一个这样的 k 使 $\alpha_k>\bar{\alpha}_k$，而对 $k\in\{j+1,\cdots,n\}\cup\{1,\cdots,i-1\}$ 有 $\alpha_k\leqslant\bar{\alpha}_k$，且至少有一个这样的 k 使 $\alpha_k<\bar{\alpha}_k$．分别作联结 x_i，x_j 和 $\bar{x}_i$，$\bar{x}_j$ 的大圆弧 γ 和 $\bar{\gamma}$，根据 18.7.5，它们分别将 P 和 $\bar{P}$ 分成两个多边形 P'，P'' 和 $\bar{P}'$，$\bar{P}''$．如果将命题 18.7.7 一面应用于 $(P',\bar{P}')$，一面又用于 $(P'',\bar{P}'')$，那么由假设即得出矛盾 $\overline{x_ix_j}>\overline{\bar{x}_i\bar{x}_j}$ 和 $\overline{x_ix_j}<\overline{\bar{x}_i\bar{x}_j}$。

18.8 球面 S^3: Clifford 平行性，在球面上的表述

在整个这一节中，$d=3$，即 $S=S^3$

18.8.1 引言． 为了揭示我们所要得到的现象，我们将 $\mathbf{R}^4$ 等同于 $\mathbf{C}^2$，并回忆起 $\mathbf{R}$ 在 S^3 上的作用，它在 1.2.9 中定义为 $\mathbf{R}\ni t\longmapsto\{(z,z')\longmapsto(e^{it}z,e^{it}z')\}\in\mathfrak{S}_{S^3}$（也可参看 4.3.3.2 和 4.3.6.2）．考虑这一作用的二条轨道 C，C'，它们都是 S^3 的大圆，因为 $(e^{it}z,e^{it}z')$ 属于由 (z,z') 所生成的 $\mathbf{C}^2$ 的 1 维复向量子空间，即实平面．而 $\mathbf{R}$ 的下述作用是由 S 的等距变换所构成的；于是，由于根据定义 $\mathbf{R}$ 在轨道上是可迁的，就有

18.8.1.1 $\qquad d(m,C')=d(n,C')\ \forall\ m,n\in C$．

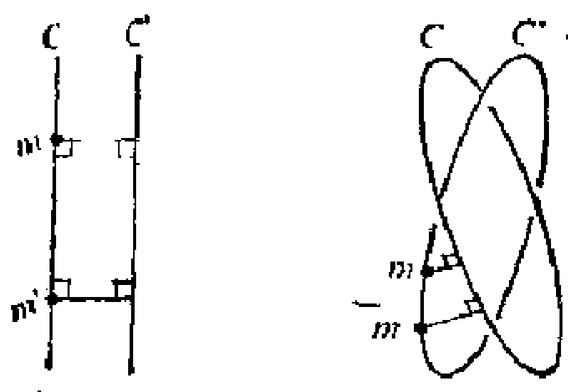


图 18.8.1.

这一性质使我们想起欧氏平面上两条平行直线 D, D' 的性质，事实上由它还可以推出 18.8.1.1 的公共值是 $d(C, C')$，且若 $m \in C$, $m' \in C'$ 满足 $\overline{mm'} = d(C, C')$，则通过 m 和 m' 的大圆与 C 和 C' 相交于直角(参看 18.11.6)。由此可引入下面的定义。

18.8.1.2 定义. 设 C, C' 是 S 的两个大圆，若 $d(m, C')$ 与 $m \in C$ 无关，则称 C 和 C' 是 Clifford 平行的，记为 $C /\!/ C'$.

这一节的目的是研究 S 的大圆间的关系 $C /\!/ C'$，我们会看到(参看 18.8.2.5) 它并不是一个等价关系，这与平面内平行线的情形不同，然而它可分成二个等价关系，它们分别称为第一类和第二类 Clifford 平行，这就是 Clifford 平行的奇特现象。其证明需综合用到 18.8.2 中度量的讨论和 $\mathbf{R}$ 的适当作用的轨道的讨论，这些作用本质上是引言中用到的特殊作用的一般化，也可见 19.1.4.

18.8.2 几何轨迹的研究

18.8.2.1 对任一大圆 C，我们用 $\bar{C}$ 表示 $\mathbf{R}^4$ 的这样一个平面，它是由下列条件确定的：$C = \bar{C} \cap S$，且 $C^\perp$ 是使 $\bar{C}^\perp = (\bar{C})^\perp$ 的大圆，即 $C^\perp = S \cap (\bar{C})^\perp$ 和 $\mathbf{R}^4 = \bar{C} \oplus (\bar{C})^\perp$；我们可以注意到，这里实质上用到了 $d = 3$ 这一事实。另外，对任一大圆 C 和任何 $\alpha \in [0, \pi]$，令

18.8.2.2 $$C_\alpha = \{n \in S : d(n, C) = \alpha\}.$$

我们有 $C_0 = C$, $C_{\pi/2} = C^\perp$, $C_{\pi-\alpha} = C_\alpha$ (因为 C 含有两个对径点)和 $C_{\pi/2-\alpha} = C^\perp_\alpha$；于是我们只需对 $\alpha \in]0, \pi/2[$ 讨论 C_α. 为此，我们引入标准正交坐标，它的前二个基向量在 C 内，后二个在 $C^\perp$ 内，设为 (x, y, z, t)，令 $u = x + iy$, $v = z + it$. 则

18.8.2.3 对 $m = (x, y, z, t)$:

$$d(m, C) = \alpha \Longleftrightarrow x^2 + y^2 = |u|^2 = \cos^2\alpha.$$

其实，当数量积 $((u, v) | (w, 0))$ 极大时，距离 $\overline{(u, v)(w, 0)}$ 达到极小值，在 $w = u/|u|$ 的情形也如此，于是

$$\cos\alpha = \left((u, v) \middle| \left(\frac{u}{|u|}, 0\right)\right) = \frac{|u|^2}{|u|} = |u|.$$

注意，由此还可得到 $|v|^2 = z^2 + t^2 = \sin^2\alpha$，因为 $(u, v) \in S$,

$|u|^2+|v|^2=1$。事实上有

18.8.2.4 引理. 设 Q_α 是 $\mathbf{R}^4$ 的锥面，在上述坐标下由方程

$$\sin^2\alpha(x^2+y^2)-\cos^2\alpha(z^2+t^2)=0$$

所定义，则有 $C_\alpha=S\cap Q_\alpha$.

左端集合包含于右端集合，这一点刚才已证明；反过来，若

$$\sin^2\alpha\cdot|u|^2=\cos^2\alpha\cdot|v|^2,$$

则因为 $|u|^2+|v|^2=1$，这就必然得出 $|u|^2=\cos^2\alpha$，根据 18.8.2.3 就得出所需结论.

现在我们注意到了一个关键问题，即锥面的方程是一个中性二次型（参看 13.1.4.3）. 因而我们可以对它用 13.7.11，从而得到下述命题.

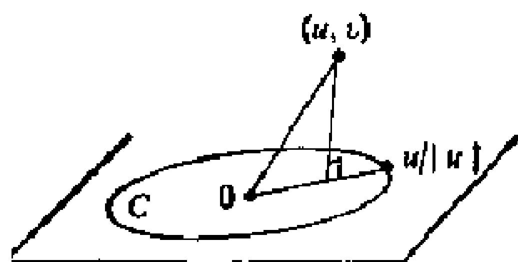


图 18.8.2.

18.8.2.5 命题. 对任何 $\alpha\in]0,\pi/2[$，任何大圆 C 和任何 $m\in C_\alpha$，恰好存在两个过 m 且 Clifford 平行于 C 的大圆.

这就表明了 $\cdot /\!/ \cdot$ 不是等价关系，因为若 C'，C'' 是命题中的两个大圆，则 $C/\!/C'$，$C/\!/C''$，但 C'，C'' 并不是 Clifford 平行的，因为 $d(C',C'')=0$ 且 $C'\neq C''$.

18.8.3 与一个大圆相伴的群的作用

18.8.3.1 我们要对每个大圆 C 以内蕴的方式定义群在 S^3 上的作用，使它成为 18.8.1 的推广. 为此，首先固定 $\vec{C}$ 的定向，然后取 $\vec{C}^\perp$ 的定向使在 $\vec{C}\oplus\vec{C}^\perp$ 上诱导的定向是 $\mathbf{R}^4$ 的规范定向；设 $f\in \mathrm{Isom}^+(\vec{C};\vec{C}^\perp)$ 是两个欧氏空间 $\vec{C}$，$\vec{C}^\perp$ 之间的、保持定向的等距映射，则可看到 $\forall\rho\in O^+(\vec{C})$ 和 $\forall f\in\mathrm{Isom}^+(\vec{C};\vec{C}^\perp)$ 有 $f\rho f^{-1}\in O^+(\vec{C}^\perp)$，且 $f\rho f^{-1}$ 仅与 ρ 有关而与 f 无关，因为 $O^+(\vec{C})$ 是交换群. 最后，若将 $\vec{C}$ 上所考虑的定向改变为相反的定向，则 $\vec{C}^\perp$ 的定向也变成与原先相反；所有这一切，都表明我们所得到的对象是在下述定义的意义上内蕴的：

18.8.3.2 定义. 对 S 的任大圆 C，都可伴以两个 $\mathrm{Is}^+(S)$ 的

子群:

$$G_C^+=\{(\rho,f\rho f^{-1})\in O^+(\overline{C})\times O^+(\overline{C}^\perp)\subset O^+(\mathbf{R}^4)=\mathrm{Is}^+(S):$$
$$\rho\in O^+(\overline{C}),\ f\in \mathrm{Isom}^+(\overline{C},\overline{C}^\perp)\},$$

$$G_C^-=\{(\rho,f\rho f^{-1})\in \mathrm{Is}^+(S):\rho\in O^+(\overline{C}),\ f\in \mathrm{Isom}^-(\overline{C},C^\perp)\}.$$

如果 C, C' 是 S 的两个大圆，且 C' 是 G_C^+ (或 G_C^-) 的轨道，则称 C' 与 C 是第一类(或第二类)平行的，并记为 $C^+/\!/C'$ (或 $C^-/\!/C'$).

18.8.4 定理

(i) 关系 $\cdot^+/\!/\cdot$ 和 $\cdot^-/\!/\cdot$ 都是等价关系。

(ii) 条件 $C/\!/C'$ 等价于 $C^+/\!/C'$ 或 $C^-/\!/C'$; 特别是，经过任一 $m\in S$，有给定的 C 的两个 Clifford 平行圆，一个是第一类的，另一个是第二类的(且若 $m\notin C\cup C^\perp$, 则 $C'\neq C''$).

(iii) C 的经过 $m\in S\backslash(C\cup C^\perp)$ 的两个 Clifford 平行圆以下列几何条件为特征：设 $m_0\in C$ 使 $d(m_0,m)=d(m,C)=\alpha$, $P=\langle m\cup C\rangle$ 是含 m 和 C 的 2 维子球面，D 是经过 m 和 m_0 的大圆，则 C' 和 C'' 均垂直于 D, 且均与 P 夹成 α 角; 特别是, C' 与 C'' 的夹角等于 2α.

(iv) 设 C, C', C'' 是三个大圆，满足条件 $C'^+/\!/C$, $C''^-/\!/C$ 和 $d(C',C)=d(C'',C)$, 则 $C'\cap C''\neq\emptyset$.

(v) (Clifford 平行四边形) 设 C, C' 是两个大圆，且 $C^+/\!/C'$, $m,n\in C$, $m'\in C'$, 又设 D 是含 m 和 m' 的大圆，而 D' 是使 $n\in D$ 和 $D'^-/\!/D$ 的大圆，则 $D'\cap C'$ 是一个点 n', 且 $\{m,n,m',n'\}$ 是下述意义下的 Clifford 平行四边形：$\overline{mm'}=\overline{nn'}$, $\overline{mn}=\overline{m'n'}$, 且在 m,m',n,n' 处的四个角相等。

(vi) (唯一性): 设 C, C', D, D' 是四个大圆，且 $C/\!/C'$, $D/\!/D'$, $d(C,C')=d(D,D')$, 则存在 $f\in \mathrm{Is}(S)$ 使 $f(C)=D$ 和 $f(C')=D'$. 若还满足 $C^+/\!/C'$, $D^+/\!/D'$, 则可在 $\mathrm{Is}^+(S)$ 中选此 f.

(i) 首先注意到 $C^+/\!/C'$ 等价于 $G_C^+=G_{C'}^+$, 这一点，例如可通过将 G_C^+ 在附于 C 和 $C^\perp$ 的坐标下写成 18.8.1 的形式而得证，因而 $\cdot^+/\!/\cdot$ 是一个等价关系。同理可知 $\cdot^-/\!/\cdot$ 也是等

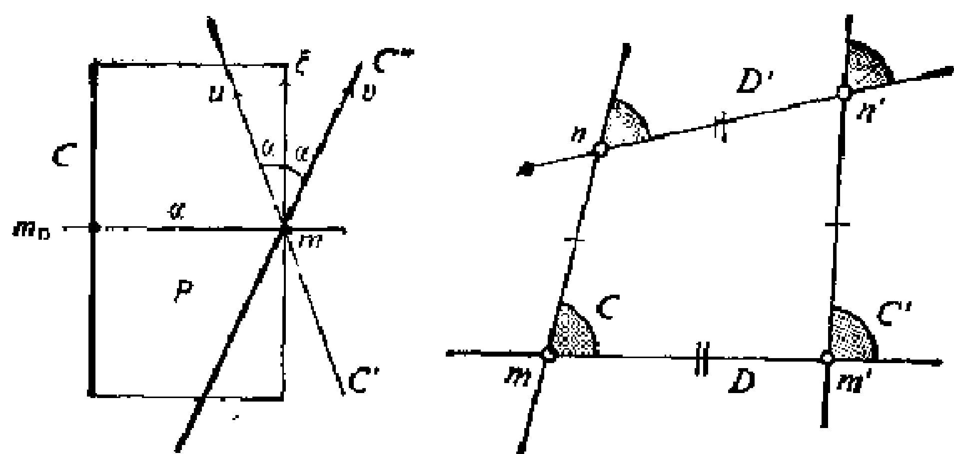


图 18.8.4.1.

价关系。

(ii) 若 $C^+ /\!/ C$ 或 $C^- /\!/ C'$，则根据定义 18.8 1.2，且由于 C，C' 是 Is(S) 的一个子群的两条轨道，就有 $C /\!/ C'$；G_C^+ 和 G_C^- 均有一轨道通过点 $m \in S \setminus (C \cup C^\perp)$，这两条轨道都 Clifford 平行于 C，因而从 18.8.2.5 即可得所需结论。

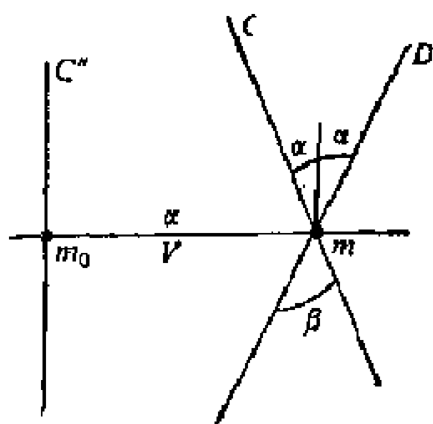


图 18.8.4.2

(iii) 正交于 D 的结论可由 $d(m_0, m) = d(C, C') = d(C, C'')$ 推出；至于夹角，我们将具体地计算 C' 和 C'' 在 m 处的切向量 u，v 同一个垂直于 D 且与 P 在 m 相切的向量 ξ。采用适当的坐标，若 $m = (z, z')$，则轨道 C' 和 C'' 由 $t \longmapsto (e^{it}z, e^{it}z')$ 和 $t \longmapsto (e^{it}z, e^{-it}z')$ 所定义，因此我们可将这些映射关于 t 在 0 处的导数取作 u，v，即 $u = (iz, iz')$，$v = (iz, -iz')$。向量 $\xi = \dfrac{u+v}{2} = (iz, 0)$ 则切于 P 且垂直于 D。于是

$$(u|\xi) = (v|\xi) = (iz|iz) = |z|^2 = \cos^2\alpha,$$

从而

$$\frac{(u|\xi)}{\|\xi\|}=\frac{\cos^2\alpha}{\cos\alpha}=\cos\alpha \text{ (参看 18.8.2.3)}.$$

(iv) 可从 18.8.2.4 和 13.7.11 得出。

(v) 证明的思想是找出一个大圆 C''，使对适当的 α，整个图形 $C\cup C'\cup D$ 位于 C''_α 内(参看 18.8.2.2)。而 (iii) 已为我们指明了做法；若 β 是 C 和 D 在 m 处所夹的锐角，令 $\alpha=\beta/2$，作大圆 V，使它在 m 处垂直于 C 和 D 所生成的 2 维子球面 Q。在 V 上取一点 m_0 使 $\overline{m_0m}=\alpha=\beta/2$，再过 m_0 作一大圆 C''，使 $C''{}^+/\!\!/C$ (参看 (ii))；根据这样的构造以及 (iii)，(i) 和 (ii)，我们有 $C\subset C''_\alpha$，$C'\subset C''_\alpha$ 和 $D\subset C''_\alpha$。于是同样还有 $D'\subset C''_\alpha$，且按照 13.7.11，$C'\cap D'$ 是一个点 n'。根据 $\cdot^-/\!\!/\cdot$ 的定义，存在 $g\in G^-_{C''}$ 使 $g(m)=m'$；然而这时有 $g(D)=D$，$g(D')=D'$，且因为 $g(C)$ 是在 C''_α 内所作的含 m' 的大圆，故同样也有 $g(C)=C'$。特别有 $g(n)=n'$，从而 $\overline{mn}=\overline{m'n'}$，因为 $g\in \mathrm{Is}(S)$。同样可得出 $\overline{mm'}=\overline{nn'}$。为证明四个角是相等的，我们可利用上面的 g 来证明这些角分别在 m，m' 以及 n，n' 处相等，或者也可利用 (iii)：这些角的公共值是 $2\alpha=\beta$！

(vi) 首先，根据 8.2.7 我们可以假设 $C=D$；于是可利用 18.8.2.5，如果 $C'=D'$，证明即已完成，如若不然，则(iii) 表明关于含 $C=D$ 且通过点 $C'\cap D'$ 的 2 维子球面的对称将 C' 变换到 D'。

18.8.5 附注. 我们知道，$S=S^3$ 在 18.8.1 的作用下的商空间恒同于 $P^1(\mathbf{C})\cong S^2$；这一点可见 18.1.3.6，也请参阅 4.3.6.2。

我们可将 (iii) 的一部分用另一种说法表示为：给定 C 和 C' 使 $C/\!\!/C'$ 后，当过 C 的 2 维子球面 P 变化时，P 始终与 C' 相交于固定角(且等于 $2d(C,C')$)。

(v) 完全对应于欧氏平面中平行四边形的性质。关于这种类似性，可见 18.11.17。

18.8.6 C_α 上的回路. 对任何的C和 α，子集 C_α 不仅在 G_C^+ 和 $G_{\bar{C}}$ 下是稳定的，且根据 18.8.2.2，它在 $O^+(\bar{C}) \times O^+(\bar{C}^\perp)$ 下也是稳定的. 我们说 C_α 在 $O^+(\bar{C}) \times \mathrm{Id}_{\bar{C}^\perp}$ 下是稳定的，这就是说 C_α 是以 $C^\perp$ 为轴的旋转；同样，C_α 是以C为轴的旋转. 因而 C_α 是双重旋转.

从拓扑的观点，$C_\alpha \simeq \{(u,v) \in \mathbf{C}^2 : |u| = \cos\alpha, |v| = \sin\alpha\}$ (参看 18.8.2.3)，因而它同胚于 $S^1 \times S^1$.

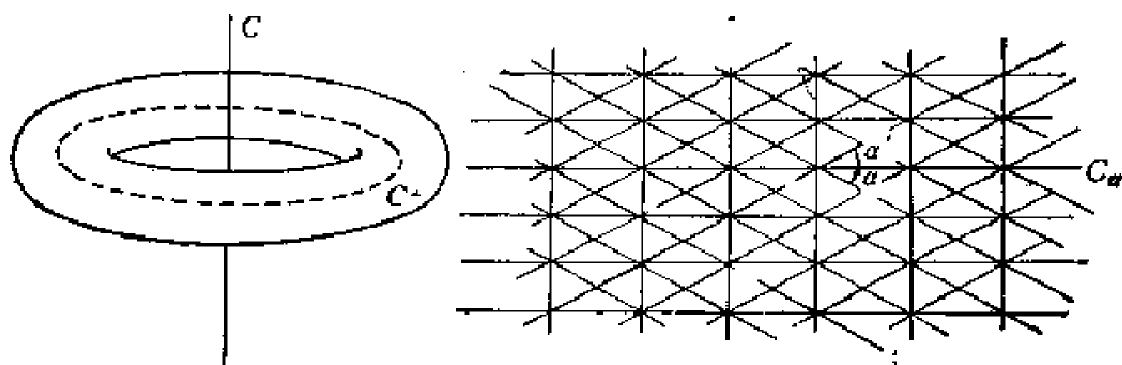


图 18.8.6.

$O^+(\bar{C}) \times \mathrm{Id}_{\bar{C}^\perp}$ 在 C_α 上的轨道是 S 上的小圆，即过 $C^\perp$ 的 2 维子球面在 C_α 上的截线；对于 $\mathrm{Id}_C \times O^+(\bar{C}^\perp)$，情况是相同的. 这两族轨道是 C_α 的经线，它们相交成直角. 在 C_α 内关于C（或 $C^\perp$）的 Clifford 平行圆也构成两族曲线，且由于 18.8.4 (iii)，与上面的"经纬线"相交成它们的角平分线，夹角为定角 α. 不过要注意，C_α 的两条同一类 Clifford 平行圆是交错的，然而两条同一类的经线是不交错的. 而且 Clifford 平行圆也根本不是在旋转曲面意义下的 C_α 的"纬线".

18.8.7 球面 S^3. 如果我们取定一个 α，例如 $\alpha = \frac{\pi}{4}$，又取定一个 C，那么可看出，我们可将球面 S^3 考虑为两个"实心"环面的并集，第一个是 $B = \bigcup_{\alpha \in [0,\pi/4]} C_\alpha$，第二个是 $B' = \bigcup_{\alpha \in [\pi/4,\pi/2]} C_\alpha$，沿它们的公共边界 $C_{\pi/4}$ 粘合起来. 在代数拓扑中考虑 S^3 时，有时这是一种很有用的方法；例如著名的 Reeb 千层酥就是这样得到的：[RE] 第 19，25 页.

18.8.8 四元数的应用. 18.8.4 可部分地利用四元数来证明；与此同时甚至可以得出某些更精细的结果(例如参看［DE2］第 205—207 页). 但是，在我们看来这种做法比之上面给出的做法是内在性不足而人为性有余.

18.9 Clifford 平行性在 3 维欧氏空间的应用：Villarceau 圆，挠平行性

18.9.1 在此我们要兑现 10.12 中的许诺：从几何上说明 10.12.1，10.12.2 和 10.12.3 中所提出的那些奇特的现象. 为此，我们只需作从 S^3 的北极 n 出发的 S^3 到 $\mathbf{R}^3$ 上的球极射影 f（参看 18.1.4.1)；同时取定过 n 的一个大圆. 我们实质上利用了反演的性质，参看 10.8 和 18.1.4.3；在 $\mathbf{R}^3$ 的规范坐标(x, y, z)下，如果适当选取 C，则 $f(C\backslash n)$ 就是 z 轴，$f(C^\perp)$ 是 xy 平面的单位圆.

18.9.2 对 $\alpha\in]0, \pi/2[$，$f(C_\alpha)$ 是什么呢？首先注意，18.8.6 表明 $f(C_\alpha)$ 是通常意义下以 Oz 为轴的旋转曲面；因此只需知道 $f(C_\alpha)$ 的一条经线即可. 然而这是 C_α 在 18.8.6 意义下一条经线的像，在 18.8.6 中我们已经知道它们是 S 的小圆，而且（参看 18.1.4.3) 经线就是 $\mathbf{R}^3$ 的（普通的）圆. 因而得出结论：$f(C_\alpha)$ 是通常意义下 $\mathbf{R}^3$ 中以 Oz 为轴的环面. 其次注意，对适当的 α，在不计相差一个相似的条件下，$\mathbf{R}^3$ 的任一环面都可作为一个 $f(C_\alpha)$ 而得到.

18.9.3 现在 18.8.6 表明环面 $\Theta = f(C_\alpha)$ 包含四族圆：通常的经线和纬线（由此看出为了得知这两族圆相交于直角可不需要 18.8.6)，以及另外两族圆，即 C 在 C_α 内的 Clifford 平行圆在 f 下的像；后两族圆就是 10.12.1 中的 Villarceau 圆，它们根据 18.8.4 (iv) 而满足 10.12.2 中的相交或不相交性质. 18.8.6 也表明它们就是倾角 α 的环面螺线（因为反演保持角度). 至于 10.12.3 末尾的挠平行性，就是由 18.8.5 通过 f 导出的性质.

18.9.4 附注

18.9.4.1 在 20.5.4 和 20.7 中，我们将给出这些现象的代数证明；而且甚至还可发现一些曲面，它们是类似于环面的连通的四次曲面，然而它们具有六族圆。

18.9.4.2 当 α 从 0 到 $\pi/2$ 变化时，如同 18.8.7 中所指出的那样，我们得到 S^3 的一个相当好的直观形象，它可以确切地说如下：在每个 C_α 上我们仅考虑第一类平行圆。从 $C=C_0$ 起直至 $C_{\pi/2}=C^\perp$，我们可用两个两个无公共点的圆（C 的第一类平行圆）填满 S^3：如果在 $\mathbf{R}^3$ 中直观地看，两个实心环 B，B' 是沿它们

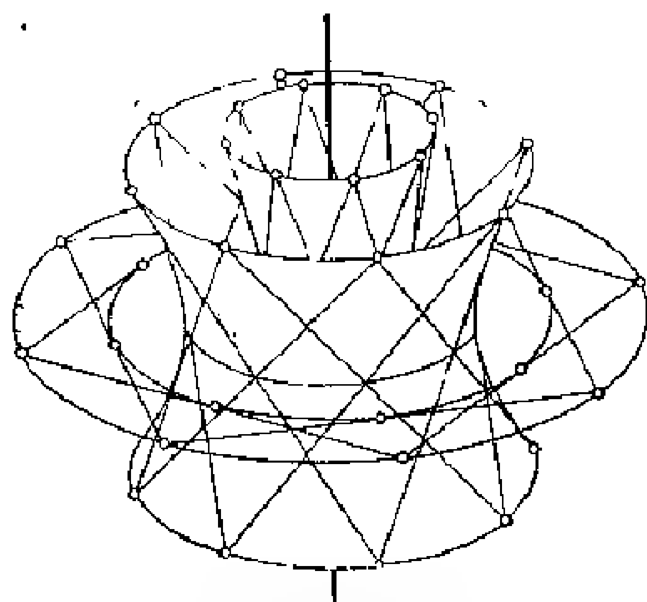


图 18.9.4.2

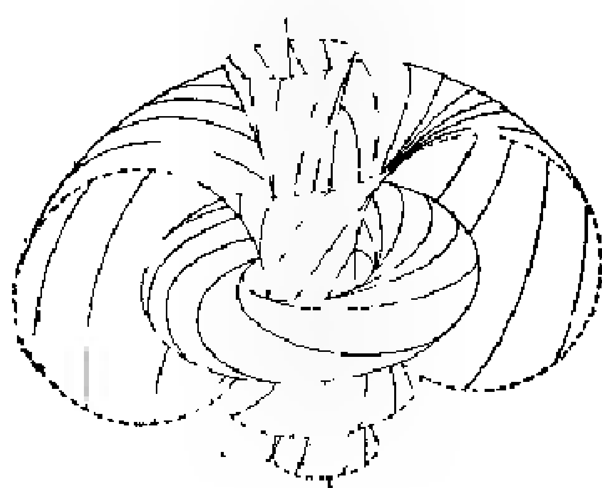


图 18.9.4.3.

Penrose，«宇宙中的几何学»，
«今日数学»丛书，Springer，1978.

的 Villarceau 圆粘合起来的，而当从 $\mathbf{R}^4$ 的观点来看从 B 到 B' 的过渡时，我们可以说经线变成了纬线(指旋转曲面的纬线，而不是 Clifford 平行圆)。当然，S^3 这种按圆的分解就是 Hopf 纤维化 4.3.7。

18.9.4.3 注意，在含有 Oz 的固定平面内，$f(C_\alpha)$ 的经线构成圆束，它们的极限点是这平面同 $f(C^\perp)$ 的两个交点。图18.9.4.2 表示一个线性模型，其中环面是以旋转双曲面代替的，而 Villarceau 圆则变为直母线。

18.9.4.4 读者想必会猜到存在 Clifford 平行性的推广，对此，建议参阅 [WO]。

18.10 S^d 的共形变换群或 Möbius 群

18.10.1 作为射影二次曲面的球面。 在 14.3.3 中我们已经看到，$P^n(\mathbf{R})$ 中方程为 $q = -\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + x_{n+1}^2$ 的二次超曲面 α 的像 $C(1, n)$ 是同胚于球面 S^{n-1} 的拓扑空间。稍加修改，我们就可在本节中利用 14.3.3 的证明中的这种等同性，并在下文中取定球面 S^d 和 $P^{d+1}(\mathbf{R})$ 的射影二次超曲面的像之间的一个双射。

18.10.1.1 记号. 令 $q = -\sum_{i=1}^{d+1} x_i^2 + x_{d+2}^2$，它是 $\mathbf{R}^{d+2}$ 的二次形式；将 $\xi \in \mathbf{R}^{d+2}$ 写成 $\xi = (z, t), z \in \mathbf{R}^{d+1}, t \in \mathbf{R}$ 的形式，从而将 $\mathbf{R}^{d+2}$ 等同于 $\mathbf{R}^{d+1} \times \mathbf{R}$。特别有 $q(\xi) = -\|z\|^2 + t^2$。因而可定义 $P^{d+1}(\mathbf{R})$ 中方程为 q 的二次超曲面 α 的像 $\operatorname{im}(\alpha)$ 到 S^d 的双射 Σ 为：

18.10.1.2 $$\Sigma : \operatorname{im}(\alpha) \to S^d : \Sigma(p(z, t)) = \frac{z}{t}.$$

18.10.1.3 18.10.1.4 将会表明，S^d 与 α 的像之间的等同关系是极好的，它是 α 的群 $PO(\alpha)$ 的第一个几何实现(参看 14.7)；至于其他的实现可见第 19 和 20 章。为了在几何上直观地了解 Σ，更方便的做法往往是通过映射 $z \longmapsto (z, 1)$，把 S^d 与 $\mathbf{R}^{d+2}$ 中超

平面上的单位球面 $H=\{(z,t):t=1\}$ 等同起来；这时，Σ 表示 $\mathbf{R}^{d+2}$ 中的点或直线，它们属于 q 的迷向锥面，穿过 H（对此我们在 5.0 已有所了解，在 19.2 还将碰到）。

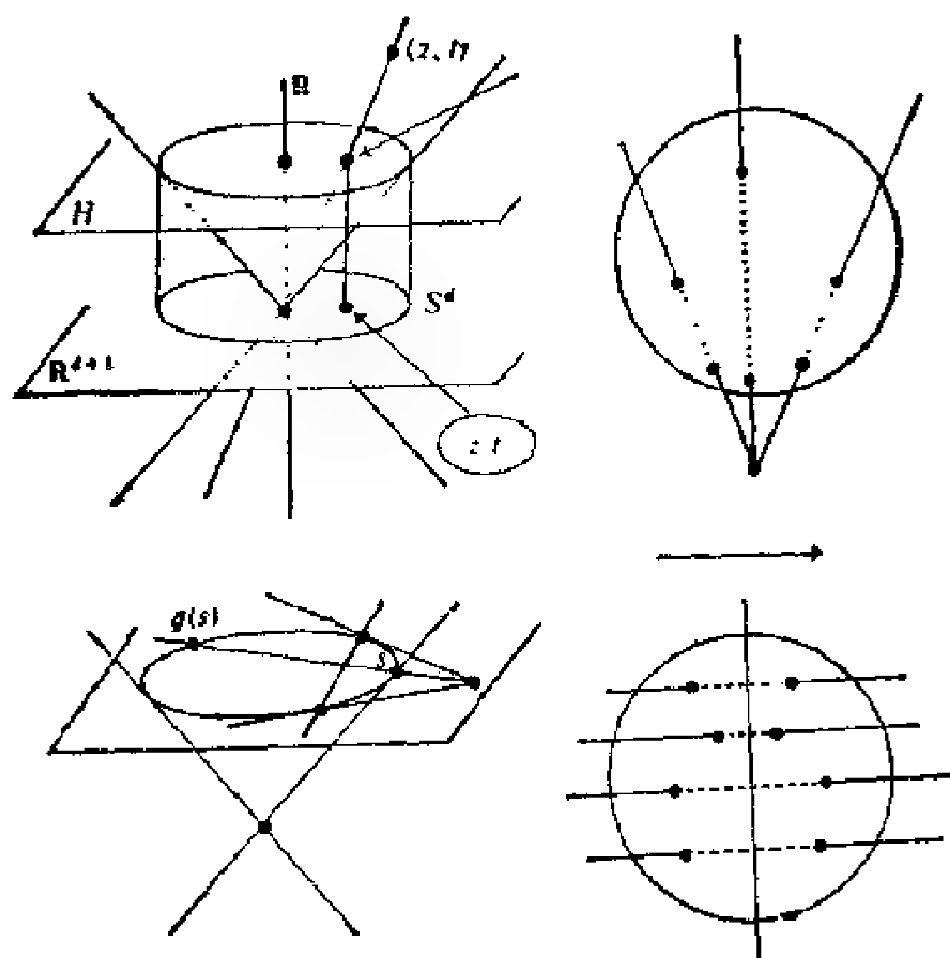


图 18.10.1.

18.10.1.4 定义. $\mathbf{R}^{d+1}$ 的整体保持 S^d 的反演或 $\mathbf{R}^{d+1}$ 的超平面向量对称在 S^d 上的限制都称为 S^d 的**反演**. S^d 的 Möbius 群是 S^d 的双射所成群中由反演生成的子群，记为 $\text{Möb}(d)$.

18.10.1.5 命题. $\text{Möb}(d)=\{\Sigma\circ(f\,|\,\text{im}(\alpha))\circ\Sigma^{-1}: f\in PO(\alpha)\}$，这就是说，经由 Σ，S^d 的 Möbius 群正好是群 $PO(\alpha)$ 在 $\text{im}(\alpha)$ 上的限制.

根据 13.7.12，我们只需证明：若 $f\in PO(\alpha)$ 来自 q 连带的超平面对称，则 $\Sigma\circ(f\,|\,\text{im}(\alpha))\circ\Sigma^{-1}$ 是 S^d 的一个反演. 然而这恰好就是 14.7.4 所说的，因为 S^d 的反演 g 的特征就是直线 $\langle s,g(s)\rangle$ 通

过 $\mathbf{R}^{d+1}$ 的一个固定点或平行于一个固定方向.

18.10.1.6 注. 在 $\mathrm{im}(\alpha)$ 上的限制定义了一个映射 $PO(\alpha)\to$ Möb(d)，它是群同构；实际上，在 $\mathbf{R}^{d+2}$ 中它就是线性映射，而锥面 $q^{-1}(0)$ 生成向量空间 $\mathbf{R}^{d+2}$.

根据 8.2.12，群 Mob(d) 包含 $\mathrm{Is}(S^d)$.

18.10.2 Möb(d) 和球极射影

18.10.2.1 设 n 是 S^d 的北极，$g:S^d\backslash n\to\mathbf{R}^d$ 是球极射影；再设 f 是 S^d 的一个反演，且 $n'=f(n)$ 是 n 在 f 下的像，则：如果 $n'=n$，那么映射 $g\circ f\circ g^{-1}$（事实上其中 f 是限制在 $S^d\backslash n$ 上的）是 $\mathbf{R}^d$ 的超平面对称；如果 $n'\neq n$，那末映射 $g\circ f\circ g^{-1}$（事实上其中 f 是限制在 $S^d\backslash\{n,n'\}$ 上的）是 $\mathbf{R}^d$ 中以 $g(n')$ 为极点的反演．我们将这一证明留给读者，这是熟悉反演的一个很好方法．

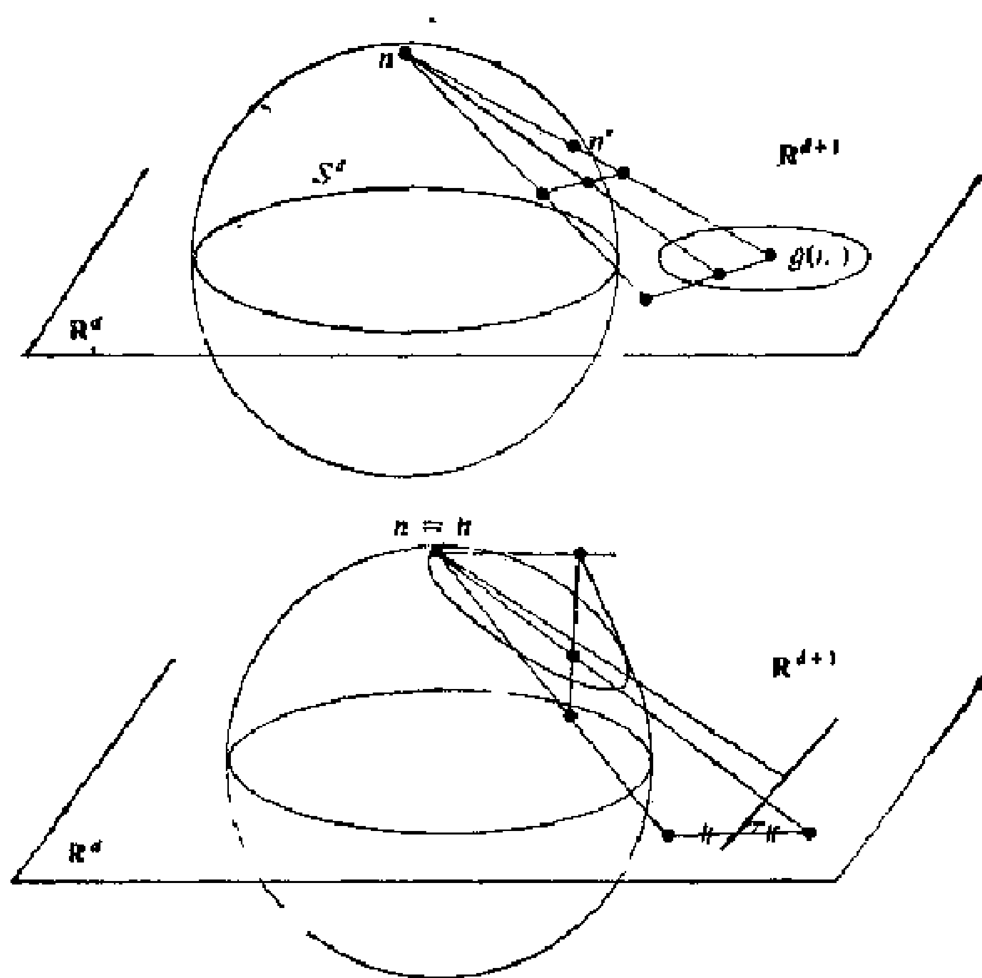


图 18.10.2.

18.10.2.2 推论. 对任何相似变换 $h\in \mathrm{Sim}(\mathbf{R}^d)$，由 $f(n)=n$ 和 $S^d\backslash n$ 上 $f=g^{-1}\circ h\circ g$ 所定义的映射 $f\in S^d\to S^d$ 是属于 $\mathrm{Möb}(d)$ 的。实际上，前面已指明，若 f 是反演或超平面对称，则 $g^{-1}\circ h\circ g$ 在适当地延拓到整个 S^d 上后，是属于 $\mathrm{Möb}(d)$ 的；然而根据 9.3.3, 9.5.2 和 10.8.1.2，这些 h 生成 $\mathrm{Sim}(\mathbf{R}^d)$. 在此我们假设了适当的延拓的存在性；最简单的做法就是在 $\mathbf{R}^d$ 上附加一个无穷远点并通过 $g(n)=\infty$ 将 g 延拓成 $S^d\to\mathbf{R}^d$，等等；我们在 20.6 将充分地讨论这个问题.

18.10.2.3 例. 我们特别可在 $\mathrm{Möb}(d)$ 中求得与 $\mathbf{R}^d$ 的向量位似相伴的映射 $f_\lambda=g^{-1}\circ H_{0,\lambda}\circ g$；若 $\lambda>1$，f_λ 以北极作为引力点，南极作为斥力点，也就是说合成映射 $f_\lambda^n(n\in\mathbf{N})$ 使 $S^d\backslash s$ 的所有点向北极 n 收敛，只有南极 s 免受北极 n 的引力.

18.10.2.4 其它的例：$n=2$ 的情形. 在这种情形下，群 $\mathrm{Möb}(2)$ 恰好是由这样的映射全体所生成，它们经由 4.3.8 和 18.1.4.5 的等同关系可写成下列形式之一：

$$z\longmapsto\frac{az+b}{cz+d}\ \text{或}\ z\longmapsto\frac{a\bar z+b}{c\bar z+d}\ (ad-bc\neq 0);$$

第二种形式有时称为反射影对应.

18.10.3 共形映射. 在 9.5.4 中，我们已经遇到过欧氏空间开集的共形映射的概念；对下面的更一般的定义，我们将随意地使用微分几何的术语，对这些术语，例如可参看 [B-G] 第 2 章。然而对球面的情形，在 18.11.22 中将给出一种更初等的叙述，这是我们将使用的仅有的情形.

18.10.3.1 定义. 设 E, F 是两个欧氏仿射空间，且 $M\subset E$，$N\subset F$ 是 E, F 的同维 C^1 类微分子流形，C^1 类映射 $f:M\to N$ 称为共形的，如果对任何 $x\in M$，当切空间 $T_xM\subset E$，$T_{f(x)}N\subset F$ 附有由 E, F 所诱导的欧氏结构时，$f'(x):T_xM\to T_{f(x)}N$ 是它们之间的相似对应. 共形映射的集合记为 $\mathrm{Conf}(M;N)$；我们也记 $\mathrm{Conf}(M)=\mathrm{Conf}(M;M)$. 另外，如果 M 和 N 还是定向的，则把 $\mathrm{Conf}(M;N)$ 中使 $f'(x)$ 保持定向 $\forall x\in M$ 的 f 构成的子集

记为 $\mathrm{Conf}^+(M;N)$.

18.10.3.2 例. 两个共形映射的合成是共形的，特别是，$\mathrm{Conf}(M)$ 和 $\mathrm{Conf}^+(M)$ 关于合成运算成群.

Mercator 射影是共形的，参看 18.1.8.2.

在一个微分子流形上，反演的限制或反演的合成都是共形映射。例如球极射影是共形的；球面的反演也是共形的（参看 18.10.1.4）.

18.10.3.3 注. 想像力丰富的读者会注意到，只要 M 和 N 的切空间附有欧氏结构，我们就能定义共形映射 $f:M\to N$ 的概念；而这里用到的恰恰就是黎曼流形的概念。有关黎曼流形之间共形映射的一般定理，可见 18.10.9.

18.10.4 定理. 对所有 $d\geqslant 2$ 有 $\mathrm{Möb}(d)=\mathrm{Conf}(S^d)$. 令 $\mathrm{Möb}^+(d)=\mathrm{Conf}^+(S^d)$. 对 S^d 的任意一个小球面 σ 和 $\forall f\in\mathrm{Möb}(d)$，$f(\sigma)$ 必是 S^d 的小球面；反之，具有这一性质的 S^d 的一个双射必定属于 $\mathrm{Möb}(d)$. 任一 $f\in\mathrm{Möb}(d)$ 都是 S^d 的至多 $d+2$ 个反演的乘积. 群 $\mathrm{Möb}(d)$ 自然同构于方程为 $-\sum_{i=1}^{d+1}x_i^2+x_{d+1}^2$ 的二次超曲面的群 $PO(\alpha)$；特别地，它是 $\frac{(d+1)(d+2)}{2}$ 维的非紧致李群. 我们还有下面的同构：$\mathrm{Möb}(1)\cong GP(1,\mathbf{R})$，$\mathrm{Möb}(2)\cong GP(1;\mathbf{C})$；最后那个群也是黎曼球面的自同构群.

根据 10.8.5.2 和 18.10.3.2，有 $\mathrm{Möb}(d)\subset\mathrm{Conf}(S^d)$；为证明相逆的包含关系，我们可以假设 $f\in\mathrm{Conf}(S^d)$ 保持北极 n 不动，这是由于 $\mathrm{Möb}(d)\subset\mathrm{Conf}(S^d)$ 和 $\mathrm{Möb}(d)$ 在 S^d 上可迁的缘故. 若 $f(n)=n$，利用北极出发的球极射影 g，并考虑到 g 和 f 是共形映射(参看 18.10.3.2)，我们可得出

$$g\circ f\circ g^{-1}\in\mathrm{Conf}(\mathbf{R}^d);$$

按照 Liouville 定理 9.5.4.6，这就是 $g\circ f\circ g^{-1}\in\mathrm{Sim}(\mathbf{R}^d)$，因而根据 18.10.2.2 即得 $f\in\mathrm{Möb}(d)$（读者会注意到，在此我们承认了一个很微妙的结论：若 f 是共形的，则它必定是 C^1 类的，参看

9.5.4.7)。

$f(\sigma)$ 是小球面，这一点可从反演的性质得出，参看 10.8.2；为证其逆，在此我们也可假设 $f(n)=n$。由于在映射 g 下，$\mathbf{R}^d$ 的直线对应于过 n 的小圆，因而 $g\circ f\circ g^{-1}$ 将 $\mathbf{R}^d$ 的直线变成直线；因此只需应用仿射几何基本定理 2.6.5 即可(试与 9.5.3.4 相比较)。

定理的余下部分可从 18.10.1.5 和 13.7.12 以及 16.3.9 得出。

18.10.5 注. $\text{Möb}(d)=\text{Conf}(S^d)$ 和 $\text{Is}(S^d)$ 的维数之差等于

$$\frac{(d+1)(d+2)}{2}-\frac{d(d+1)}{2}=d+1;$$

我们可以说，这个差对应于连带于 $\lambda\in\mathbf{R}^*$ 的 18.10.2.3 中的 f_λ 和 S^d 上的若干点(d 对应这些点，1 对应 λ)，这些点在 $\text{Is}(S^d)$ 下是生成 $\text{Möb}(d)$ 的。

对 $d=1$ 和 $d=2$，$\text{Möb}(d)$ 的维数分别为 3 和 6；这与下面得出的结果是一致的。

18.10.6 命题. 群 $\text{Möb}(1)$ 和 $\text{Möb}(2)$ 分别在 S^1 和 S^2 的不同点所构成的三元组集合上单纯可迁。对任何 $d\geqslant 2$，群 $\text{Möb}(d)$ 在 S^d 的不同点所构成的三元组集合上可迁。

$d=1$ 和 $d=2$ 的情形，可从 4.5.10 经由 16.3.9 得出。如果 $d\geqslant 3$，我们只需注意到三个点生成一个 2 维子球面，而 $\text{Möb}(d)$ 包含 $\text{Is}^+(S^d)$，根据 8.2.7 它就在 2 维子球面上可迁。

18.10.7 Möbius 不变量. 将上面的命题与 6.1 比较后，我们就可进一步思考这样的问题：比如在 $d\geqslant 3$ 时，是否能将 18.10.6 的结论改进为四个点？如果不能，是否能找到一个必然的、可能还是作为特征量的不变量？答案是容易得到的；对不同的 $a,b,c,d\in S^d$，令

18.10.8 $$\mu(a,b,c,d)=\frac{ca}{cb}\Big/\frac{da}{db},$$

其中所用的是 $\mathbf{R}^{d+1}$ 中的欧氏距离，则 μ 是 $\text{Möb}(d)$ 下的不变量，也就是说，对所有不同的 $a,b,c,d\in S^d$ 和 $f\in\text{Möb}(d)$，总有 $\mu(f(a),f(b),f(c),f(d))=\mu(a,b,c,d)$；我们称 μ 为 Möbius

不变量．根据 18.10.1.5，只需对 S^d 的任一反演证明 μ 的不变性；对称的情形是显然的，而对反演的情形可利用 10.8.1.3 通过直接计算而得出．

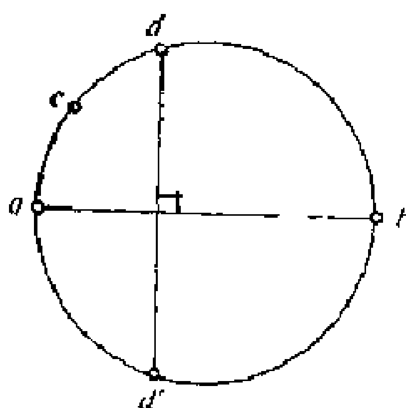


图 18.10.8.

与交比相反，如图 18.10.8 所示，μ 不是特征量，也可参看 19.6.10．

18.10.9 注． 球面具有一个严格地比它的等距变换群更大的共形变换群；这个现象对一个紧致黎曼流形来说，原本似乎并不太使人感到意外．然而，新近才证明的结果表明，球面是所有紧致黎曼流形中唯一具有这种性质的：见 [LF2] 或 [OA]，也可看 19.8.6．

近来，Möbius 群在好多研究中已经起着基本的作用，其中有：关于某些负常曲率空间的 Mostow 刚性定理（见[MW 1]和[MW 2]），关于黎曼球面 S^2 上 Laplace 算子的最小特征值的 Hersch 定理（见 [HS]，也可见 [E-S] 第 130—131 页）．

18.11 练　　习

18.11.1 图 18.1.1 下面的球径计顶部杠杆系统有什么作用？

18.11.2 证明：若球面的图是共形的且保持面积，则它必定是等距的．

18.11.3 证明斜驶线的球极射影是对数螺线．

18.11.4 在 S^2 上讨论下列问题：寻找并作出一个小圆，它分别满足(1)通过三个点，(2)通过两个点且切于一已知小圆，(3)通过一点且切于两个已知小圆，(4)切于三个已知小圆．

18.11.5 在 S^2 上讨论三角形的下列概念：垂直平分线，高线，中线和角平分线，并讨论它们的共点性．

18.11.6 在球面上讨论 9.2.2。

18.11.7 对 S^d 的一族点 $(x_i)_{i=1,\cdots,k}$，讨论 9.7.6 变成什么。

18.11.8 讨论球面三角形全等的"不定"情形，例如两个三角形有两条边和一对角相等的情形。

18.11.9 对任意半径 R 的球面，求出 18.6.13 中的各公式，并观察当 R 变得很大时，这些公式情况如何。

18.11.10 **Lexell 定理**。给定两点 $x, y \in S^2$ 后，讨论使 $\mathscr{T} = \langle x, y, z\rangle$ 的角 α, β, γ 满足 $\alpha + \beta - \gamma =$ 常数的点 $z \in S^2$ 的集合（容有已知角的弧在 S^2 上的推广，参看 10.9.4）；并由此导出使 $\mathscr{T}$ 具有不变面积的 z 的集合。其推广可见 [DX] 第 227 页。

18.11.11 分别对下列球面三角形给出一个完整的公式表：直角三角形，等腰三角形，等边三角形和直边三角形。

18.11.12 讨论 S^2 上的有三个直角的四边形；将余下的那个角表示成两条不相邻的边的函数。

18.11.13 **球面上的三角形不等式**. 利用三点的 Gram 行列式证明这不等式(参看 8.11.5)。

18.11.14 **S^d 上 $d+2$ 个点之间距离的关系**. 证明：若 $(x_i)_{i=1,\cdots,d+2}$ 是 S^d 的 $d+2$ 个点，则总成立 $\det(\cos(\overline{x_ix_j})) = 0$。

18.11.15 **球面圆锥曲线**。设 $q \in Q(\mathbf{R}^3)$ 是非退化的，$C = q^{-1}(0)$ 是相应的迷向锥面，并假设是非空的。证明存在两个或一个彼此平行的仿射平面系列，它们都交 C 于圆。

证明存在非退化的 $q^* \in Q(\mathbf{R}^3)$，使对任何 $x \in C^*\backslash 0$（其中 $C^* = (q^*)^{-1}(0)$），$x^\perp$ 成为 C 的切平面；我们称 C^* 是 C 的极锥面。

假设 C 含有两列不同的圆截口（参看 15.7.14），证明 C^* 也必定如此。设 D, D' 是 $\mathbf{R}^3$ 中垂直于 C^* 的圆截口的直线，对 $S = S^2$，令 $D \cap S = \{f, g\}$，$D' \cap S = \{f', g'\}$。证明 $C \cap S$ 满足：

$$C \cap S = \{m \in S: \overline{mf} + \overline{mf'} = \text{常数}\},$$

或

$$C \cap S = \{m \in S: \overline{mf} + \overline{mg'} = \text{常数}\}.$$

反之，设 f, f' 是 S 的两个不同的点，$a\in \mathbf{R}_+$，证明对适当的 a，$\{m\in S \mid \overline{mf}+\overline{mf'}=a\}$ 是形如 $C\cap S$ 的。我们称 $C\cap S$ 是**球面圆锥曲线**，f 和 f'（以及 g, g'）称为**焦点**。有关球面圆锥曲线的其他结果，可见〔DX〕第 230—231 页。

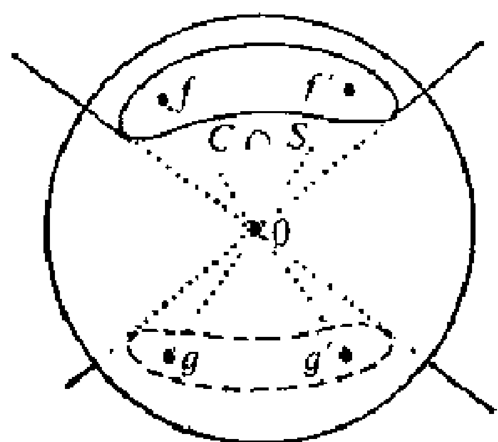
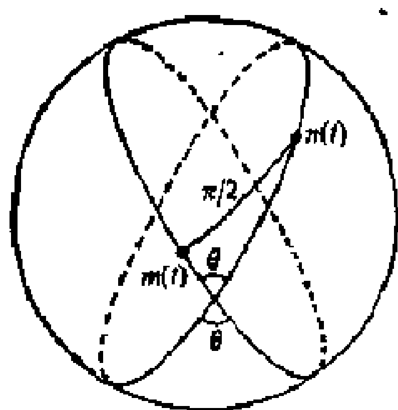


图 18.11.15.

18.11.16 Cardan 联轴节（万向节），等速万向节. 在两轴夹成角 θ 的Cardan联轴节中，算出最差的角速度比；为此，在 S^2 上交角为 θ 的两个大圆 C，D 上考虑这样的动点 $m(t)$，$n(t)$：$\overline{m(t)n(t)}=\pi/2$。分别对 $\theta=\pi/3, \pi/4, \pi/6$，算出这最差的角速度比。证明：如果两根轴 A，A' 通过 Cardan 联轴节与一中间轴 B 相连接，使得 A，B，A' 在同一平面内，且 B 分别与 A 和 A' 所夹的角相等（等速万向节），则 A 和 A' 具有相同的角速度.



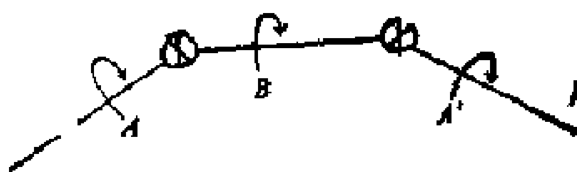


图 18.11.16.1.

18.11.17 平坦环面和 Clifford 平行圆. 设 Λ 是 $\mathbf{R}^2$ 的一个网格（参看 9.14.29），$\Theta_\Lambda=\mathbf{R}^2/\Lambda$ 是 $\mathbf{R}^2$ 关于子群 Λ 的商空间，即关于等价关系 $m\sim n \Longleftrightarrow m-n\in\Lambda$ 的商空间。对规范投影 $p:\mathbf{R}^2\to\Theta_\Lambda$

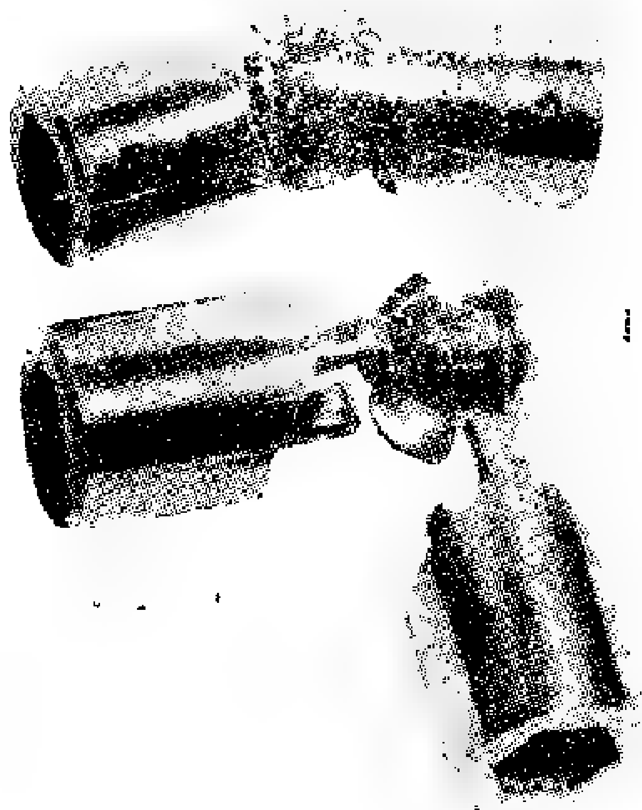


图 18.11.16.2.

及 $u, v\in\Theta_\Lambda$，令 $d(u,v)=d(p^{-1}(u),p^{-1}(v))=\inf\{d(x,y): p(x)=u, p(y)=v\}$。证明 d 是 Θ_Λ 上的一个度量而且定义了与商拓扑相同的拓扑，Θ_Λ 则局部等距于 $\mathbf{R}^2$. 根据 Λ 的性质（参看 9 14 29），讨论 Θ_Λ 中的最短路线. 我们称 Θ_Λ 为平坦环面。

证明对 $\alpha\in]0,\pi/2[$，赋有 S^3 所诱导的度量的 18.8.6 的 C_α 等距于平坦环面；我们将按 α 的不同数值，具体作出网 Λ，使得 C_α 与 Θ_Λ 等距。

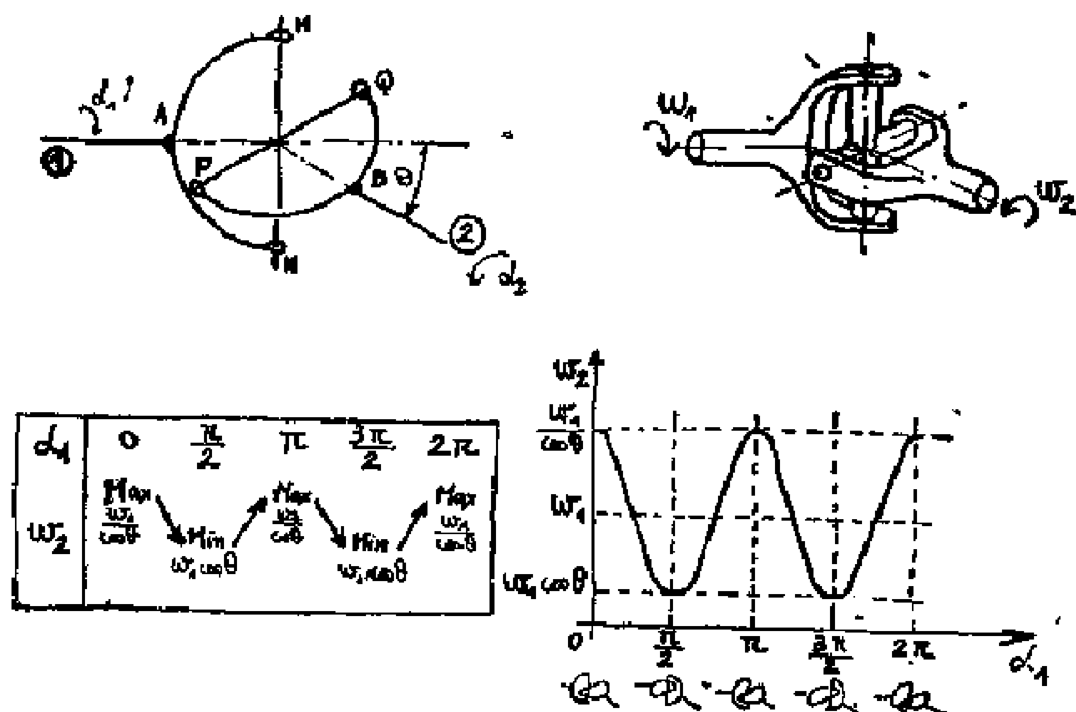
18.11.18 给定 S^3 的一个大圆 C，记 Σ 为 C 的第一类平行圆的集合，对 $C', C''\in\Sigma$，令

$$\delta(C',C'')=2d(C',C'').$$

证明 δ 使 Σ 成为一个等距于 S^2 的度量空间（参看 4.3.6.2）。

18.11.19 **Dupin 四次圆纹曲面.** 设 $\Sigma, \Sigma', \Sigma''$ 是 $\mathbf{R}^3$ 的三个球面；证明对这些球面的适当位置，与这三球面相切的球面的集合包络出一个旋转环面（在适当反演下）的反演曲面. 由此推出这些曲

十字铰接式的 Cardan 联轴节



α_1	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
ω_2	Max $\frac{\omega_1}{\cos\theta}$	Min $\omega_1\cos\theta$	Max $\frac{\omega_1}{\cos\theta}$	Min $\omega_1\cos\theta$	Max $\frac{\omega_1}{\cos\theta}$

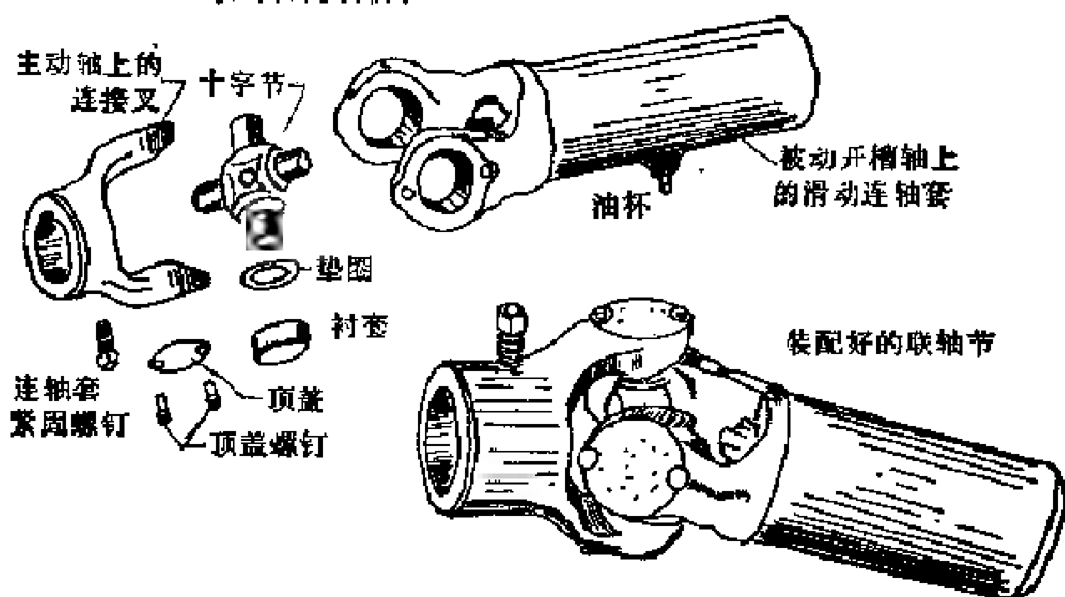


图 18.11.16.3

面的各种性质。这种曲面称为 Dupin 四次圆纹曲面，在 20.7 中我们会再次遇到它们。

18.11.20 证明任一与环面切于两点的球面与这环面交于两个 Villarceau 圆。

SPICER-GLAENZER 联轴节

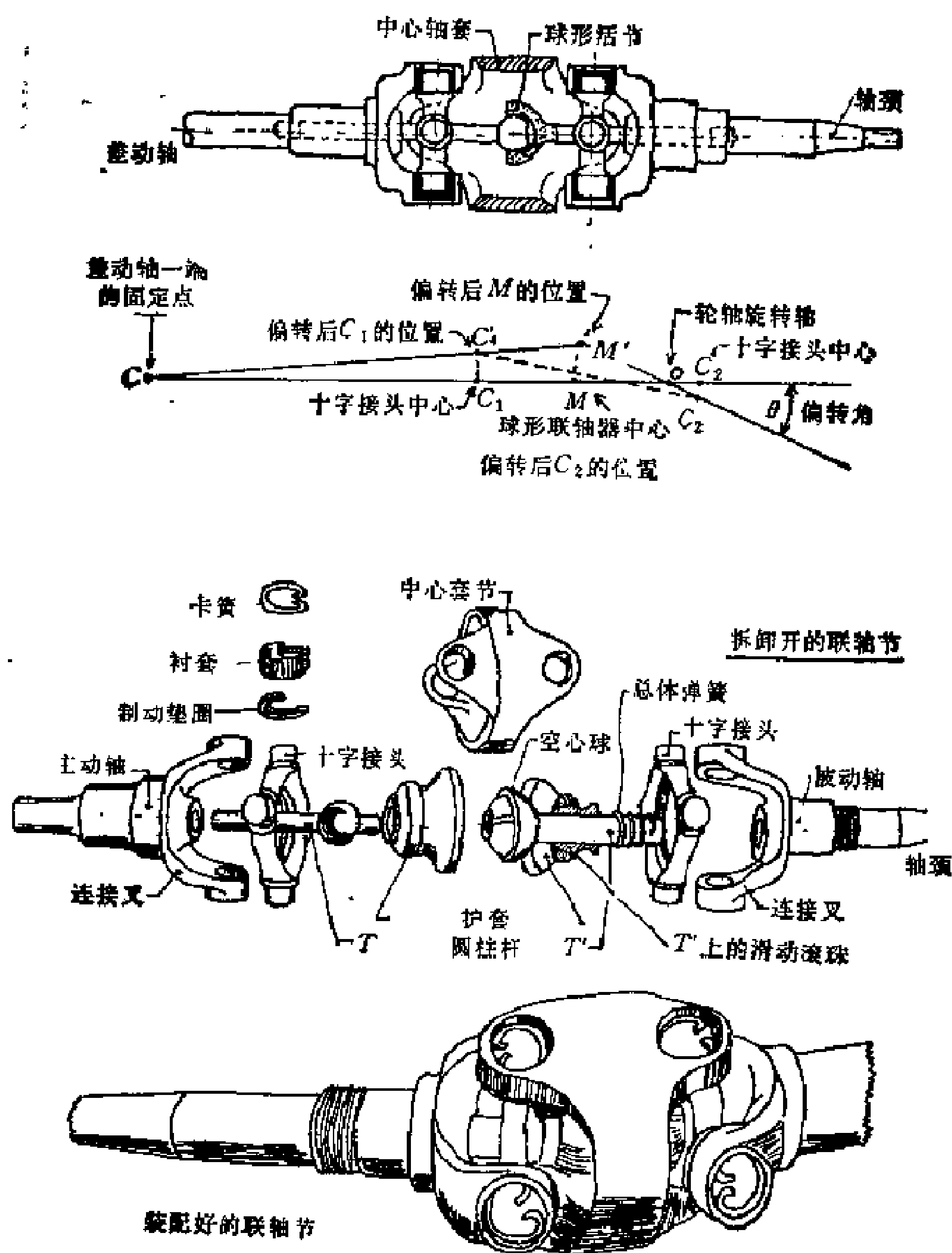


图 18.11.16.4.

18.11.21 在 S^1 中不同点构成的三元组集合中，群 Möb(S^1) 的轨道是什么？

18.11.22 设 $S=S^n$，$f:S\to S$ 是 C^1 类映射，S 在 $\mathbf{R}^n$ 从北极 ν 和南极 σ 出发的球极射影分别记为 φ 和 ϕ。证明 f 是共形映射的充要条件是下面定义的四个映射在9.5.4.2的意义下是共形的：

$$\varphi\circ f\circ\varphi^{-1},\ \phi\circ f\circ\varphi^{-1},\ \varphi\circ f\circ\phi^{-1},\ \phi\circ f\circ\phi^{-1}.$$

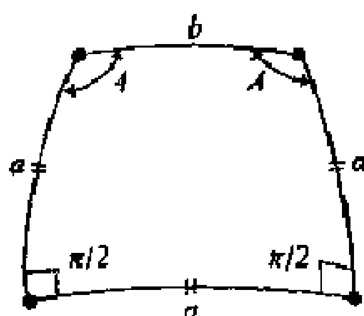


图 18.11.25.

18.11.23 对球面，按照9.8.1中提出的问题，对9.8.5进行讨论。

18.11.24 对图18.1.2中的 Cosinus 球径计作出评论。

18.11.25 在图18.11.25的球面四边形中，把角 A 和边 b 表成 a 的函数；对图18.11.26考虑同样的问题.

18.11.26 证明其像含于 S^n 中的 $\mathbf{R}^{n+1}$ 的任一曲线，它在 $\mathbf{R}^{n+1}$ 的

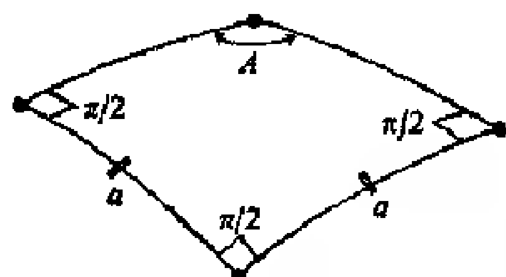


图 18.11.26.



图 18.11.27.1.

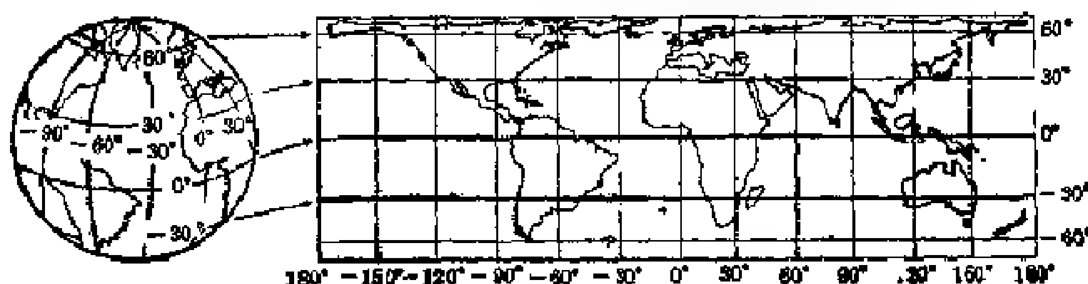


图 18.11.27.2.

欧氏度量下的长度，等于在 S^n 的内蕴度量下的长度。

18.11.27 证明球面沿正交于南北极轴线的直线向外切于赤道的圆柱面所作的射影，是保持面积的（见图 18.11.27.1 和 18.11.27.2）（这个射影有时被误称为 Lambert 射影）。

18.11.28 证明 18.1.8.4 中的公式。

18.11.29 确定 18.1.8.5 中的函数 Ξ。

18.11.30 证明在"Hopf 纤维化"映射 4.3.6.3 中，S^3 的任一大圆映射到 S^2 的一个（大或小）圆上。

第19章 椭圆几何与双曲几何

我们对这两种几何的兴趣首先是从历史角度引起的。它们是作为欧几里得公设的反例提出的，然而同时又是内容极为丰富的几何学，具有如我们所希望的那样多的对称性和完美的直线。在前一种几何中，从一点出发不能作一条直线的平行线，在后一种几何中则有无穷多条这样的平行线。在前一种几何中，三角形的内角和总大于 π，而在后一种几何中这个和数总小于 π。

连同欧几里得几何在内，我们就有了三个几何体系，它们之间有某种统一性，并且具有互为补充的性质。双曲几何的另一个引人注目之处，在于它是很多重要的数学成果的基础，其中包括一些最新的成果，有关参考文献见19.7.3. 关于非欧几何的历史，见[CR 3] 第1章。

第19.1节讨论椭圆几何，如果我们熟悉商空间结构，这种几何是很容易的。但对于九世纪的几何学家来说，情况就并非如此了，这也正说明了何以椭圆几何要比双曲几何晚发现达五十年之久。Clifford 平行在这种几何中很容易表达。

本章所有其它的篇幅都用于讨论双曲几何，这种几何，即使在平面上讨论，也显示出某些困难之处。我们可以在 Poincaré 半平面上给出一种初等的阐述，如19.7所示。但是，仅仅了解这一内容的读者，首先在进行某些计算，诸如计算一个三角形的边长或角度以及它的面积时，就会感到棘手。况且，这样的阐述掩盖了双曲几何与球面共形群之间的本质联系。因此我们另外给出一种阐述，也许比较冗长，但我希望它的双曲几何味儿是很纯正的。我想，它能使读者足以解决双曲几何及其计算中的绝大部分问题。

这样的阐述是以对三个基本模型的了解作为基础的：一个是射影模型，它对双曲几何作了深刻的解释，每当遇有难点时我们总

要引用这一模型，另两个是线性模型 $\mathscr{B}$ 和共形模型 $\mathscr{C}$。在讨论各种不同问题时，这三种模型都将加以引用。

在全书将近结束之际，我们逐步地让读者有更多的机会来显示自己的成熟。此外，当然我们也利用了第 13 章中的结果，但应用这些结果时，间或也在有此必要时用更简单的方法重新说明它们，以得到一种纯双曲几何的阐述形式。

第一部分：椭圆几何

19.1 椭圆几何

在整个这一节中，E 表示 $d+1$ 维欧氏向量空间；$P=P(E)$ 表示连带的射影空间，$p: E\setminus 0 \to P$ 表示规范射影，$S=S(E)$ 表示 E 的单位球面。我们将 P 等同于 E 中向量直线的集合 $G_{E,1}$，有时也把后者记为 $\mathscr{D}(E)$。$D, D' \in E$ 的夹角（$\in [0, \pi/2]$）记为 $\overline{DD'}$（参看 8.6.3）。方程为 $\|\cdot\|^2$ 二次超曲面的射影变换群记为 $PO(E)$（参看 14.7）。

19.1.1 定义

19.1.1.1 命题. 直线的夹角在 P 上定义了一个度量空间结构；P 具有这一度量后，称为 E 连带的**椭圆空间**。我们对 P 赋以连带拓扑，它与 4.3.1 的拓扑一致。

我们利用4.3.3.2：p 在 S 上的限制$p: S \to P$是满射，我们要将 S 中 x, y 的距离 $\overline{xy}$（参看 18.4）同 P 中的距离 $\overline{p(x)p(y)}$ 相比较。若 $m, n \in P$，且有 $p^{-1}(m), p^{-1}(n) \subset S$，则

19.1.1.2
$$\begin{cases}\overline{mn} = d(p^{-1}(m), p^{-1}(n)) = \inf\{\overline{xy}, \overline{(-x)y}\}\\ \forall x, y \text{ 使 } p(x)=m,\ p(y)=n.\end{cases}$$

这是 8.6.3 的推论，因为或者 $(x|y) \geqslant 0$，或者 $(-x|y) \geqslant 0$。由此可如下地得出命题：设任取 $m, n, s \in P$，x 使 $p(x)=m$；我们可求得 $y \in p^{-1}(n)$ 和 $z \in p^{-1}(m)$ 使 $\overline{xy}=\overline{mn}$ 和 $\overline{xz}=\overline{ms}$。

根据 18.4.2: $\overline{yz} \leqslant \overline{yx} + \overline{xz}$, 从而有

$$\overline{ns} = \inf\{\overline{yz}, \overline{(-y)z}\} \leqslant \overline{yz} = \overline{mn} + \overline{ns}.$$

19.1.1.3 例. 设 $x \in S$, $m = p(x)$, $B_S(x, \pi/4) = \{y \in S: \overline{xy} \leqslant \pi/4\}$, $B_P(m, \pi/4) = \{n \in P: \overline{mn} \leqslant \pi/4\}$, 则 p 在 $B_S(x, \pi/4)$ 上的限制是从 $B_S(x, \pi/4)$ 到 $B_P(m, \pi/4)$ 上的一个等距映射. 一旦 $r > \pi/4$, 这一结果对 $B_S(x, r)$ 就不成立.

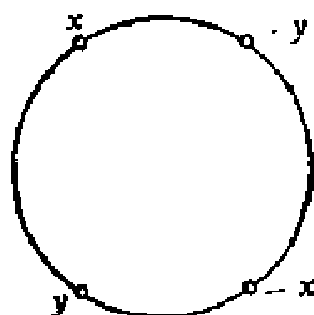


图 19.1.1.2.

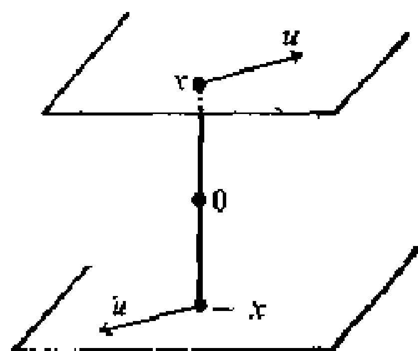


图 19.1.1.4.

19.1.1.3 (续)附注. 所有维数相同的椭圆空间是等距的(参看 8.1.6); 它们的公共直径为 $\pi/2$.

在 4.3.9 中, 我们曾经说明做出 $P^2(\mathbf{R})$ 的图形的困难性; 读者若想获得一个直观的印象, 可考虑 19.1.2.1.

19.1.1.4 切向量, 切纤维. 设 Θ 是使 $x \in S$ 和 $y \in x^{\perp} \subset E$ 的点偶 (x, y) 的集合, $\mathscr{R}$ 是等价关系

$(x, u) \sim (x', u')$ 如果 $x' = \varepsilon x$, $u' = \varepsilon u$, 其中 $\varepsilon = \pm 1$.

我们称商集 $\Theta/\mathscr{R}$ 为 P 的切纤维, 并记为 TP. P 在 $m \in P$ 处的切空间是 $\Theta/\mathscr{R}$ 中与满足 $p(x) = m$ 的 (x, y) 连带的子集, 记为 T_mP. 因为 $-\mathrm{Id}_E$ 是一个等距变换, 故对所有 $m \in P$, T_mP 具有自然的欧氏向量空间结构; 因此 T_mP 的两个非零向量之间的夹角就是 8.6.3 中定义的角. 切空间 T_mP 与微分流形 P 的切空间是一致的, 参看 4.2.6.

19.1.1.5 直线, 射线. 无需定义 P 中的直线或子空间; 它们就是把 P 看作射影空间时的直线或子空间(参看 4.6). 设 $m \in P$,

$u \in T_m P$，$\|u\| = 1$，我们称 P 的子集

$$\{p(\cos t \cdot x + \sin t \cdot u); t \in [0, \pi/2]\}$$

是起点为 m、切向量为 u 的射线．射线的终点就是 $n = p(u)$；反之，设 $m, n \in P$ 是两个给定的点，若 $\overline{mn} < \pi/2$，则存在唯一的一条起点为 m 且包含 n 的射线；若 $\overline{mn} = \pi/2$，则恰好存在两条射线，它们的切向量方向相反．

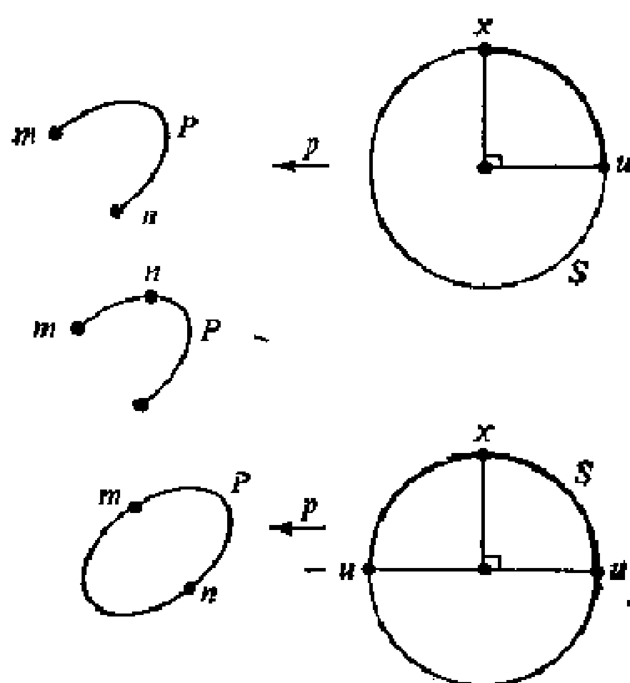


图 19.1.1.5.

19.1.1.6 注． 在椭圆空间中有一条且仅有一条直线通过两个不同的点；若 $d = 2$（椭圆平面），两条不同的直线有且仅有一个公共点；然而对球面则不然，这就是我们要将 P 作为 S 的商空间引入的缘故．因此，从来不可能有集合论意义下的平行线（参看 2.4.9.5 和 19.3.2），另外，椭圆空间满足欧几里德体系中欧几里德公设之前的所有欧氏几何的性质；椭圆几何之所以令人感兴趣，原因之一就在于它是对欧几里德公设的历史探索中的一个反例，见 2.6.7．19.1.1.4 表明 P 自然地是一个黎曼流形．

19.1.1.7 规范测度． 因为对所有 $m \in P$ 有 $\# p^{-1}(m) = 2$，故我们可通过下式来定义 P 的规范测度 τ：

$$\int_P f\tau = \frac{1}{2}\int_S (f\circ p)\sigma,$$

其中 σ 是 S 的规范测度（参看18.3.7）。例如，P 的体积就是 S 的体积之半，即 $\frac{\alpha(d+1)}{2}$。

19.1.2 度量性质

19.1.2.1 严格三角形不等式，最短道路. 19.1.1.1中的证明表明：$\overline{ns} = \overline{nm} + \overline{ms}$ 当且仅当 m 在以 n 为起点、s 为终点的一条射线上(反之亦然)(参看 19.1.1.5)。由此得出，设 m 和 n 是在 P 中给定的点，则若 $\overline{mn} < \pi/2$，存在由起点为 m 的射线所提供的从 m 到 n 的唯一的一条最短道路。若 $\overline{mn} = \pi/2$，存在两条从 m 到 n 的最短道路，它们是起点为 m、终点为 n 的两条射线。

19.1.2.2 等距变换群. 由 P 上度量的定义可知，它的等距变换群 $\mathrm{Is}(P)$ 包含 $\mathrm{PO}(E)$（参见 14.7）。我们来证明两者是相等的；设 $f\in \mathrm{Is}(P)$，可假设存在 m 使 $f(m)=m$，这是因为 $\mathrm{PO}(E)\subset \mathrm{Is}(P)$ 在 P 上是可迁的。取定 x 使它满足 $p(x)=m$，根据 19.1.1.3，$f\in \mathrm{Is}(P)$ 通过唯一的一个等距变换 $\tilde{f}\in O(E)$，按 9.8.2 可在 $B_S(x,\pi/4)$ 上诱导出一个等距变换。我们来证明 $\tilde{f}$ 在整个 P 上(不仅在 $B_P(m,\pi/4)$ 上)诱导出 f：因为

$$\mathrm{PO}(E)\subset \mathrm{Is}(P),$$

因而我们可假设 $\tilde{f} = \mathrm{Id}_E$，于是只需证明：若 $f\in \mathrm{Is}(E)$ 是 $B_P(m,\pi/4)$ 上的恒等变换，则它必是 P 上的恒等变换。设 $n\in P$，D 是从 m 到 n 的最短道路；则 $f(D)$ 也是从 m 到 $f(n)$ 的最短道路，因而就是射线，由此可推得 $f(D)=D$，因为 $D\cap B_P(m,\pi/4) = f(D)\subset B_P(m,\pi/4)$。

等距变换群在 P 上是两点可迁的，这一点可从 18.5.5 得出；对此可参看 9.1.7。

19.1.2.3 垂直平分集. 设 $m,n\in P$，$m\neq n$；与欧氏空间和双曲空间的情形相反(参见 9.7.5 和 19.4.2)，这两点的垂直平分集

$$\{s\in P : \overline{ms} = \overline{ns}\}$$

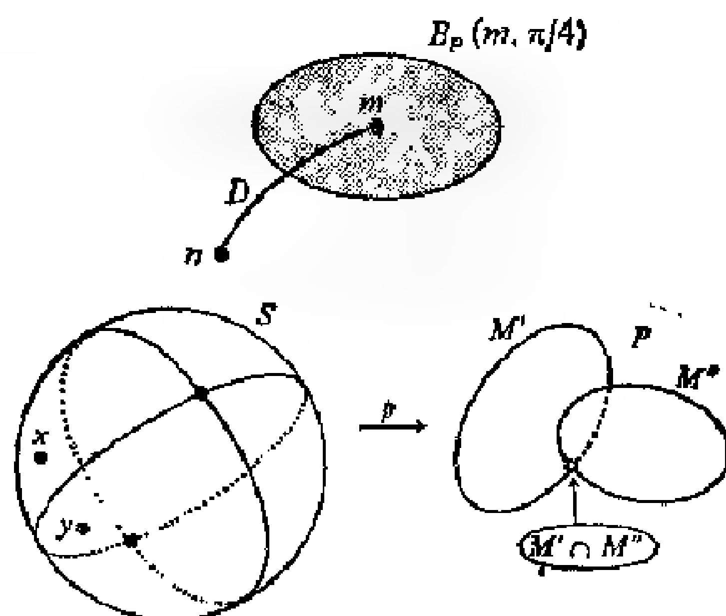


图 19.1.2.3.

不是一个超平面。事实上，对满足 $p(x)=m$，$p(y)=n$ 的任意 x，y，根据 19.1.1.2 有：

$M=\{s\in P:\overline{ms}=\overline{ns}\}=p(\{z\in S: \overline{zx}=\overline{zy}$ 或 $\overline{z(-x)}=\overline{zy}\})$.

特别地，M 是 P 的两个正交超平面 M'，M'' 的并集；交集 $M'\cap M''$ 则刚好是 $\{s\in P:\overline{sm}=\overline{sn}=\pi/2\}$。

例如，在 $d=2$ 的情形下，垂直平分集是由两条在交点处互相垂直的直线所组成的。

19.1.2.4 对称变换. 我们可在 P 中定义关于子空间，特别是关于超平面的对称变换，后者生成 $\mathrm{Is}(P)$，参看 8.2.12.

19.1.2.5 问题. 如同在 9.7.2 和 9.7.4 中对欧氏空间以及在 18.4.7 中对球面的讨论那样，我们可以找出 P 中 $d+2$ 个点之间的距离的一般关系，以及椭圆空间中一个纯度量特征；见 [BL] 第 IX, X, XI 章，同样可见 [B-K] 第 117 页和 [PV2].

19.1.3 椭圆平面；三角形. 为讨论 P 的三角形，我们可假设 $d=2$，这是由于 P 的三个点生成一个椭圆平面。因此在这一小节中我们假设 $d=2$。

19.1.3.1 若 P 中射影无关的三点 m，n，s（参看 4.6.6）使 $\overline{mn}<\pi/2$，$\overline{ns}<\pi/2$，$\overline{sm}<\pi/2$，则称这三点的集合为 P 的三

角形 $\mathscr{S}=\{m,n,s\}$. 根据 19.1.1.5，这三角形具有完全确定的边，它们是三条射线，记这些边为 M,N,S. 在 m 处(分别还有 n，s 处)确定以 m 为起点的唯一射线 N 和 S 的那两个单位向量的夹角称为 $\{m,n,s\}$ 在 m 处的角；我们记 $\mathscr{S}$ 的边长为 a,b,c，即 $a=\overline{ns}$，$b=\overline{sm}$，$c=\overline{mn}$，记 $\mathscr{S}$ 在 m,n,s 处的角为 α,β,γ.

19.1.3.2 必须注意，给定 P 的三角形 $\mathscr{S}$ 后，并不总存在 S 的(球面)三角形使它具有与 $\mathscr{S}$ 相等的角和边长. 对这一现象有各种解释，首先看下面的例：设 $\theta\in]\pi/3,\pi/2[$，根据 18.6.10，存在一个边长为 $\pi/3,\pi/2,\theta$ 的球面三角形 $\langle x,y,z\rangle$ 和一个边长为 $\pi/3,\pi/3,\pi-\theta$ 的球面三角形 $\langle x',y',z'\rangle$；P 的两个三角形 $\{m=p(x),n=p(y),s=p(z)\}$，$\{m'=p(x'),n'=p(y'),s'=p(z')\}$ 的边长分别相等，即为 $\pi/3,\pi/3,\theta$. 如果 (α,β,β) 表示 $\langle x,y,z\rangle$ 的角，(α',β',β') 表示 $\langle x',y',z'\rangle$ 的角，则我们可看出 $\{m,n,s\}$ 的角是 (α,β,β)，而 $\{m',n',s'\}$ 的角为 $(\alpha',\pi-\beta',\pi-\beta')$. 因而看出，球面三角形全等的情形(ii)在 P 中是不成立的(参看 18.6.13.10).

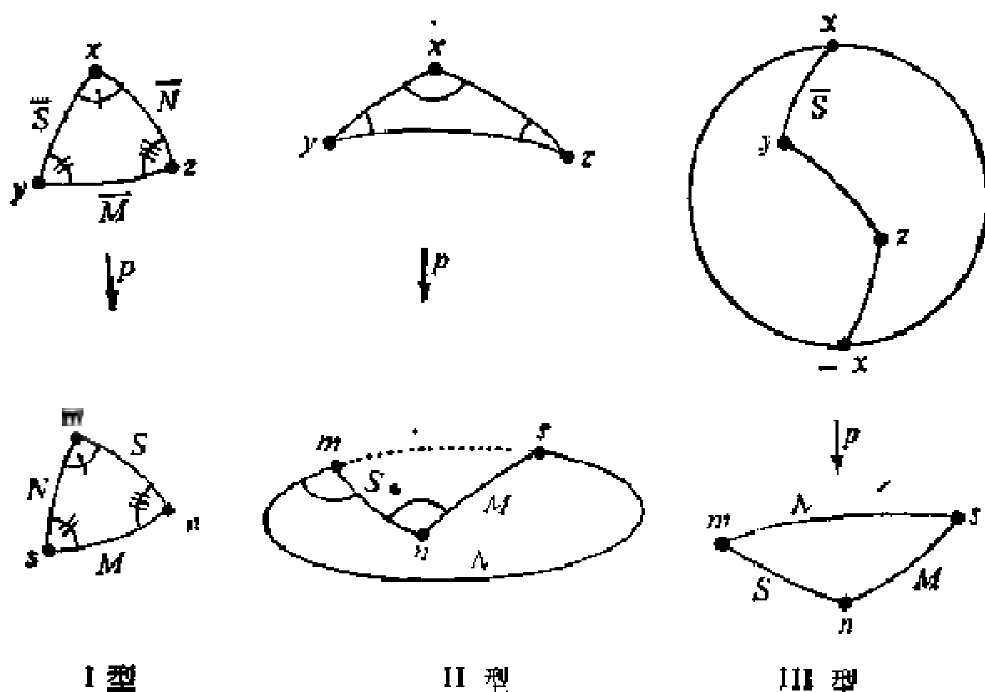


图 19.1.3.2

19.1.3.3 反过来，设已给定 P 的三角形 $\mathscr{S}=\{m,n,s\}$，我

们要作 S 上的一个三角形，使之刚好被射影到 $\mathscr{E}$ 上；取定 $x\in S$ 使 $f(x)=m$，则存在以 x 为起点的唯一大圆弧 $\bar{S}$ 使 $p(\bar{S})=S$。设 y 为 $\bar{S}$ 的终点，$\bar{M}$ 是起点为 y 且使 $p(\bar{M})=M$ 的大圆弧，而 $\bar{N}$ 是以 $\bar{M}$ 的终点 z 为起点且使 $p(N)=N$ 的大圆弧。N 的终点 x' 是满足 $p(x')=m$ 的，因而 $x'=\pm x$。容易看出，若 $x'=x$（或 $x'=-x$），不论我们从 n 还是从 s 出发"提升"三角形，结果都是相同的；在第一种情形下我们说 $\mathscr{E}$ 是 I 型的，在第二种情形下则说 $\mathscr{E}$ 是 II 型的。说 $\mathscr{E}$ 是 I 型的（或 II 型的）等价于说回路 $M\cup N\cup S$ 是同伦于零的（或不同伦于零的），参看 4.3.9.3 和 18.2.3。为了知道 $\mathscr{E}$ 是 I 型还是 II 型的，我们也可计算

$$\cos b\cos c+\sin b\sin c\cos\alpha;$$

如果这个量是正的（或负的），则 $\mathscr{E}$ 是 I 型的（或 II 型的）。从拓扑上说，出现这两种三角形的原因在于（维数 ≥ 2 的）实射影空间的基本群有两个元素（参看 4.3.9.3）；如果三角形 $\mathscr{E}$ 的边构成的回路同伦于 0（或不同伦于 0），则 $\mathscr{E}$ 是 I 型的（或 II 型的）。

如果 $\mathscr{E}$ 是 I 型的，那么我们可定义 $\mathscr{E}$ 的内部为与 $\mathscr{E}$ 相伴的球面三角形的内部的射影；于是对 19.1.1.7 意义下的三角形内部的面积，有

$$\mathscr{E}\ \text{的面积}=\alpha+\beta+\gamma-\pi\ (\text{参看 18.3.8.4})。$$

对 P 的三角形的其他事项，可见 19.8.4 或 [CE 3] 第 232—237 页。特别是 P 中存在这样的三角形，它们的对应边相等但对应角却不同，因而不是等距的。

19.1.4 $d=3$ 的情形：Clifford 平行性，在射影空间的表述。 如果 $d=3$，我们可将 18.8.4 移到 $P=P(\mathbf{R}^4)=p(S^3)$ 中，这一节内容在射影空间的表述要比在球面上的表述更令人满意。

设 $\mathscr{D}=\mathscr{D}(P)$ 是 P 的直线的集合；对 $D,D'\in\mathscr{D}$，若 $\forall m\in D$ 有 $d(m,D')=d(D,D')$，则记 $D/\!/D'$。关系 $\cdot/\!/\cdot$ 不是等价关系，但存在 $\mathscr{D}$ 中的两个等价关系 $\cdot{}^{+}/\!/\cdot$ 和 $\cdot{}^{-}/\!/\cdot$，使得 $D/\!/D'$ 导致 $D^{+}/\!/D'$ 或 $D^{-}/\!/D'$。对所有 $m\in P$ 和 $D\in\mathscr{D}$，存在唯一的 $D'\ni m$ 和 $D''\ni m$ 使 $D'^{+}/\!/D$，$D''^{-}/\!/D$；如果 $d(D,D')=$

$d(D, D'')$ 且 $D^+ /\!/ D'$, $D^- /\!/ D''$, 则 $D' \cap D'' = \{1 点\}$. $D', D'' \ni m$ 且 $D' /\!/ D$, $D'' /\!/ D$ 的特征是：若 $m_0 \in D$ 使 $d(m, D) = \overline{m_0 m}$, 则 D', D'' 垂直于直线 $\langle m_0, m\rangle$，且都与平面 $\langle D, m\rangle$ 交成角 $\alpha = \overline{m_0 m}$.

当然也可作类似于 18.8.4(v) 和 (vi) 的叙述.

19.1.5 注. 关于复射影空间上类似的度量，见 19.8.22.

第二部分：双曲几何

19.2 在模型 $\mathscr{P}$ 和 $\mathscr{B}$ 上的定义

19.2.1 记号. 在本章的这后一部分，固定记号如下：空间 $\mathbf{R}^{n+1}$ 恒同于积空间 $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}$，其元素记为 $\xi = (z, t)$, $z \in \mathbf{R}^n$, $t \in \mathbf{R}$. 双曲平面 H 指 $\{(z, t): t = 1\}$. q 表示符号数为 $(1, n)$ 的二次型 $-\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + x_{n+1}^2$, 其极型为 P，迷向锥为 $Q = q^{-1}(0)$; 因而有

$$q(z, t) = -\|z\|^2 + t^2, \quad P((z', t), (z, t')) = -(z|z') + tt'.$$

$\mathscr{B} = U(0, 1) \subset \mathbf{R}^n$ 表示 $\mathbf{R}^n$ 中单位开球. 以 q 为方程的二次曲面 α 所成的射影群 $PO(\alpha)$ 记为 $G(n)$. 我们还记得，$P^n(\mathbf{R}) = P(\mathbf{R}^{n+1})$ 恒同于 $\mathbf{R}^{n+1}$ 中向量直线的集合 $G_{n+1,1} = \mathscr{D}(\mathbf{R}^{n+1})$.

19.2.2 度量. 作用在 $\mathscr{D}(\mathbf{R}^{n+1})$ 上的群 $G(n)$ 有三条轨道（参见 13.7.1）：迷向直线集合，q 在其上正定的直线的集合 $\mathscr{P}$，q 在其上负定的直线的集合. 第一种情况正是 18.10 中讨论过的 Möb(d) 的情况，参见 18.10.1.5. 第二种情况是以下几节的讨论对象；第三种情况是第 20 章的对象.

19.2.3 于是，$\mathscr{P}$ 表示使

$$q(\xi) > 0 \quad \forall \xi \in D \backslash 0$$

的 $D \in \mathscr{D}(\mathbf{R}^{n+1})$ 的集合. 由 $q(\xi = (z, t)) = -\|\xi\|^2 + t^2 > 0$ 推得 $t \neq 0$，特别还可推知 $D = \mathbf{R}\xi$ 与 H 交于一点 $(z/t, 1)$，而

且使 $\|z/t\| < 1$，由此可得映射

19.2.4 $$\Phi:\mathscr{D}\to\mathscr{B}:\Phi(p(z,t))=\frac{z}{t},$$

它是双射；令 $\Phi^{-1}=\Lambda$。

为作图方便，可将 $\mathscr{B}$ 等同于 H 的子集 $\{(z,t)\in H:\|z\|<1\}$，以后有时就采用这一观点。

19.2.5 命题. 设 $D, D'\in\mathscr{P}$；任一过 D 和 D' 的平面（$D\neq D'$ 时是唯一的）与 Q 交于两条不同的直线 U, U'。对任意的 $\xi\in D\backslash 0$，$\xi'\in D'\backslash 0$，有

$$\frac{P(\xi,\xi')}{\sqrt{q(\xi)q(\xi')}}\geqslant 1$$

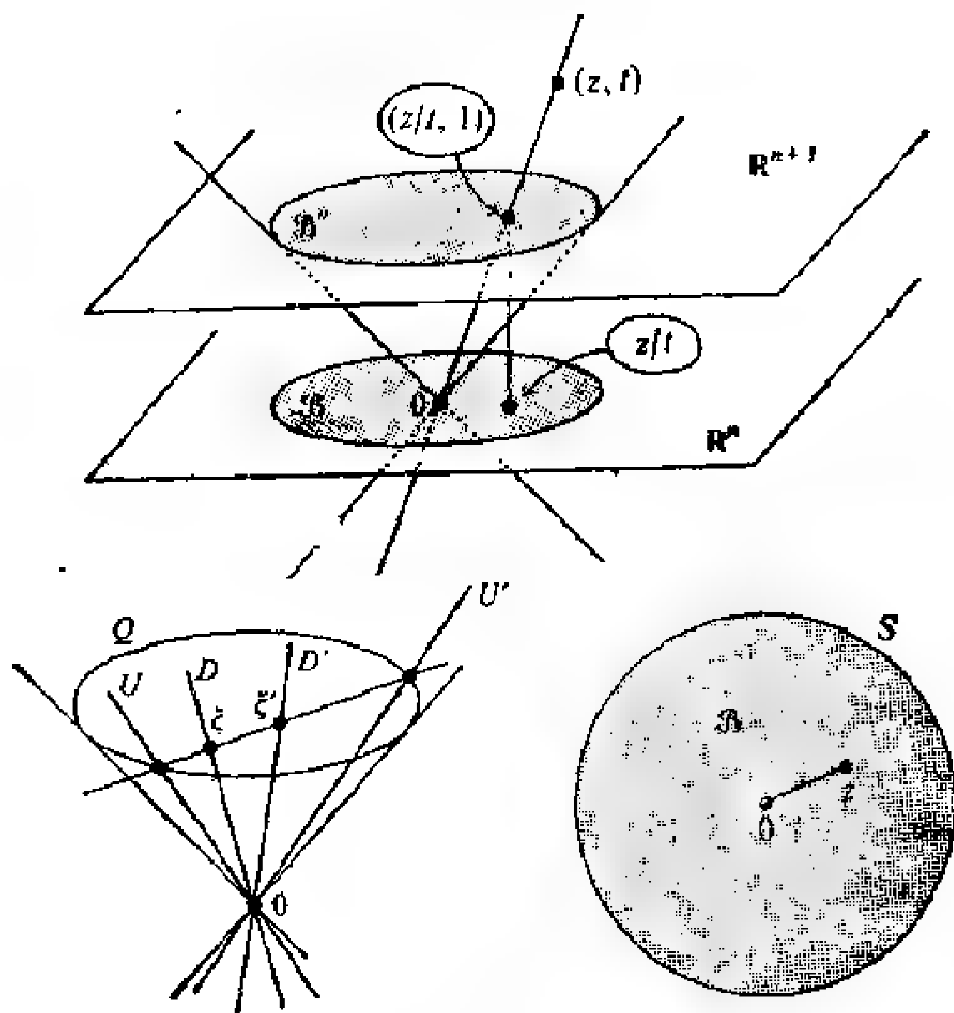


图 19.2.5。

和 $$\operatorname{Arc\,ch}\frac{P(\xi,\xi')}{\sqrt{q(\xi)q(\xi')}}=\frac{1}{2}|\log([D,D',U,U'])|.$$

后一数值记为 $d(D,D')$，它使 $\mathscr{P}$ 成为一个度量空间. 该度量空间 $(\mathscr{P},d)$ 称为以 $\mathscr{P}$ 为模型的 n 维双曲空间. 以 $\mathscr{B}$ 为模型的双曲空间的度量是由距离定义的，也记为 d，即 $d(z,z')=d(A^{-1}(z),A^{-1}(z'))$. 一维(或二维)时称为双曲直线(或平面).

其中涉及的交比，是对由 D 和 D' (假定是不同直线)生成的向量平面 P 所导出的射影直线而言的. 不难验证 d 是度量，除三角形不等式将在 19.3.2 中证明外，其它性质可由 13.8.6 和 13.8.9 推出，其中只须证明 P 是一个 Artin 平面；而这一点又可由 13.4.7 推出，因为 q 在 P 上的限制是退化的，从而符号数不可能是 $(2,0)$ 或 $(0,2)$.

19.2.5.1 注. 请与 11.9.4 相比较.

19.2.6 例. 设 $z\in\mathscr{B}$；则若令 $r=d(0,z)$ 就有

$$r=\operatorname{Arc\,ch}\frac{1}{\sqrt{1-\|z\|^2}},\quad \|z\|=\operatorname{th} r.$$

由此可知，$\|z\|$ 趋于 1 时，$d(0,z)$ 趋于无穷. 读者可以考虑一下双曲空间是否是完备空间.

19.2.7 切空间. 我们跟 19.1.1.4 相仿地进行讨论，首先注意到根据 2.4.8.2，对任一使 $q(\xi)>0$ 的 ξ，$\xi^\perp$ 是 $\mathbf{R}^{n+1}$ 中的超平面. 满足 $q(\xi)=1$ 和 $u\in\xi^\perp$ 条件的(ξ,u)偶全体在等价关系 $(\xi,u)\sim(\xi',u')\Longleftrightarrow\xi'=\varepsilon\xi,\ u'=\varepsilon u$ (其中 $\varepsilon=\pm1$) 下的商空间，称为 $\mathscr{P}$ 的切纤维，记为 $T\mathscr{P}$. $\mathscr{P}$ 在 D 处的切空间记为 $T_D\mathscr{P}$，就是满足 $q(\xi)=1$ 和 $\xi\in D$ 条件的 (ξ,u) 在 $T\mathscr{P}$ 中的象空间；它具有一种反欧几里得空间结构，也就是说具有一个负定的二次型. 事实上，根据 13.4.7，对 $q(\xi)>0$ 来说，q 在 $\xi^\perp$ 上的限制是负定的；而 $-\mathrm{Id}_{\xi^\perp}$ 是具有 $q|_{\xi^\perp}$ 的 $\xi^\perp$ 上的等距变换，特别是，可以定义 $T_D\mathscr{P}$ 中两个向量的夹角；若这两个向量是由 (ξ,u) 和 (ξ,v) 给定的，则夹角 $\alpha\in[0,\pi]$ 定义为

19.2.8 $$\cos\alpha = -\frac{P(u,v)}{\sqrt{q(u)q(v)}}.$$

19.2.9 在模型 $\mathscr{B}$ 中，$z\in\mathscr{B}$ 的切空间由 $\Lambda(z)$ 的切空间推衍而得，但亦等同于 $\mathbf{R}^n$；要注意的是，除了 $z=0$ 的情形（这时读者可自行验证），在 $T_z\mathscr{B}$ 中的夹角是与在欧几里得空间中的夹角不一样的。这也是一个原因，使我们要在下面引进模型 $\mathscr{C}$ 和 $\mathscr{H}$，对这两种模型而言的双曲角度，是与欧几里得角度一致的；但作为代价的是，它们不再象 $\mathscr{P}$ 和 $\mathscr{B}$ 那样具有与通常直线一致的那种直线（参见 19.6.2）。

19.2.10 直线和射线．子空间． 在 $\mathscr{P}$ 中，把 $\mathscr{P}$ 和 $P^n(\mathbf{R})$ 的一条射影直线的非空交集称为直线；在 $\mathscr{B}$ 中，直线指 $\mathscr{P}$ 的直线在 Φ 下的象集，因而就是开线段（其端点是 $\mathscr{B}$ 的边界 S^{n-1} 上不同的两点）。

在 $\mathscr{P}$ 中，设 $q(\xi)=1$，$q(u)=-1$，且 $u\in\xi^\perp$，则当 t 取遍 $\mathbf{R}_+$ 时向量 $\operatorname{ch}t\cdot\xi+\operatorname{sh}t\cdot u$ 所生成直线的集合称为以 D 为始

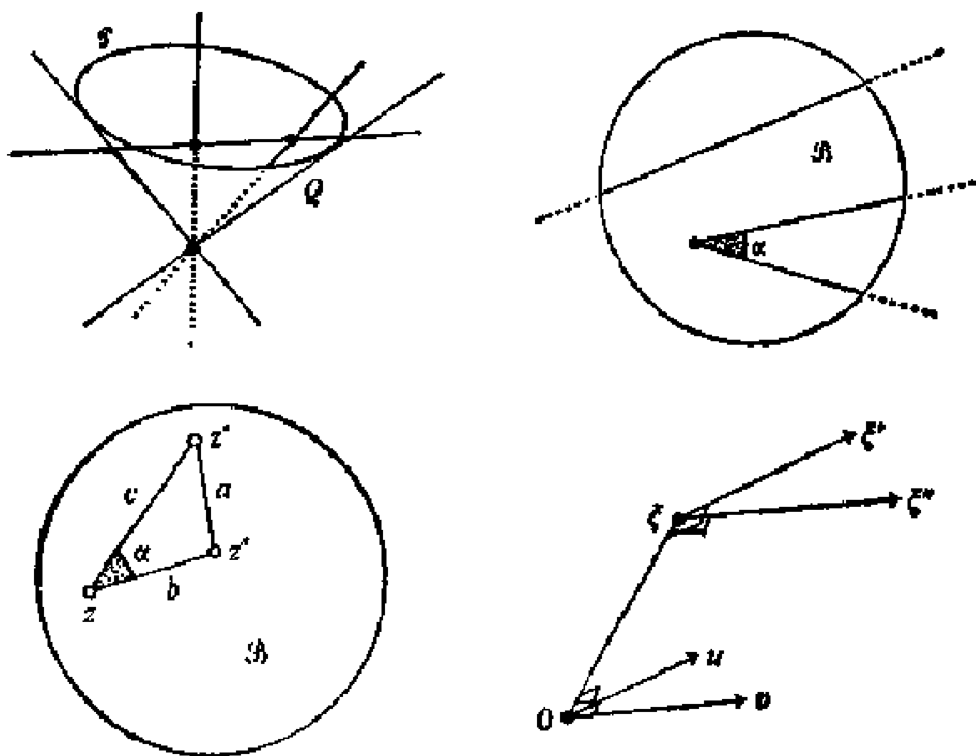


图 19.2.10.

点的射线；该射线的切向量就是 (ξ, u) 的伴随向量.

由 Φ 可推得模型 $\mathscr{B}$ 中的射线概念；这些射线就是半开线段，其闭端点在 $\mathscr{B}$ 中，开端点在 S^{n-1} 中.

两条具有相同始点(在 $\mathscr{P}$ 或 $\mathscr{B}$ 中)的射线的夹角，就是它们的切向量在 19.2.7 的意义下的夹角(关于 $\mathscr{B}$ 参见 19.2.9).

$\mathscr{P}$ 或 $\mathscr{B}$ 中不同的两点决定唯一的一条包含该两点的直线；它们决定唯一的一条以其中指定一点为起点的射线.

同样可决定 $\mathscr{B}$ 的 k 维子空间，$n-1$ 维子空间就是超平面.

19.2.11 注. 与 9.7.4，18.4.7 和 19.1.2.5 相似的问题可见 19.8.16 和 [BL] 第 XII 章.

19.3 基本公式和推论

设 $z, z', z'' \in \mathscr{B}$ 且 $z \neq z'$，$z \neq z''$；令 $d(z', z'') = a$，$d(z'', z) = b$，$d(z, z') = c$ 且设以 z 为起点，经过 z' 和 z'' 的两条射线在 z 处的夹角为 α，则

19.3.1

$$\boxed{\operatorname{ch} a = \operatorname{ch} b \operatorname{ch} c - \operatorname{sh} b \operatorname{sh} c \cos\alpha.}$$

证明是跟 18.6.8 相仿的；设 $D = \Lambda(z)$，$D' = \Lambda(z')$，$D'' = \Lambda(z'')$，取 $\xi \in D$，$u, v \in \xi^{\perp}$，$k, h \in \mathbf{R}_+$ 使 $q(\xi) = 1$，$q(u) = q(v) = -1$，另取 $\xi' = \xi + ku \in D'$，$\xi'' = \xi + hv \in D''$. 根据 19.2.5，19.2.8，并因为 $k, h \in \mathbf{R}_+$，相继可得

$$q(\xi') = 1 - k^2, \quad q(\xi'') = 1 - h^2, \quad \operatorname{ch} c = \frac{1}{\sqrt{1-k^2}},$$

$$\operatorname{sh} c = \frac{k}{\sqrt{1-k^2}}, \quad \operatorname{ch} b = \frac{1}{\sqrt{1-h^2}}, \quad \operatorname{sh} b = \frac{h}{\sqrt{1-h^2}},$$

$$P(u, v) = -\cos\alpha, \quad P(\xi', \xi'') = 1 - \cos\alpha \cdot kh,$$

$$\operatorname{ch} a = \frac{1 - \cos\alpha \cdot kh}{\sqrt{1-k^2}\sqrt{1-h^2}} = \operatorname{ch} b \operatorname{ch} c - \operatorname{sh} b \operatorname{sh} c \cos\alpha.$$

19.3.2 严格三角形不等式. 既然 $\cos\alpha \geqslant -1$，由 ch 的递增性，

就有 $\operatorname{ch} a \leqslant \operatorname{ch} b \operatorname{ch} c + \operatorname{sh} b \operatorname{sh} c = \operatorname{ch}(b+c)$ 和 $a \leqslant b+c$。又因 ch· 是严格递增的，等式 $a=b+c$ 仅在 $\cos\alpha=-1$ 时成立，而后一条件等价于 $\alpha=\pi$，或者还可以说成在 $\mathscr{B}$ 中点 z 属于端点为 z'，z'' 的线段。

因而，在 $\mathscr{B}$ 的任意两点之间，存在唯一的一条最短道路，即单调地生成的线段 $[z, z']$。其长为 $d(z, z')$；特别地，$\mathscr{B}$ 的度量是优异的，从而是内蕴的（参见 9.9.4.5）。这样，直线集合 $\mathscr{B}$ 就具有了欧氏仿射空间中相应的性质，也就是说它们都是从一点到另一点的最短道路；与 19.1.1.6 比较可以看出，现在对双曲平面来说，过不在直线 Δ 上的一点 z，有无穷多条不与 Δ 相交的直线；它们构成两端直线之间所有直线的集合，见图 19.3.2。

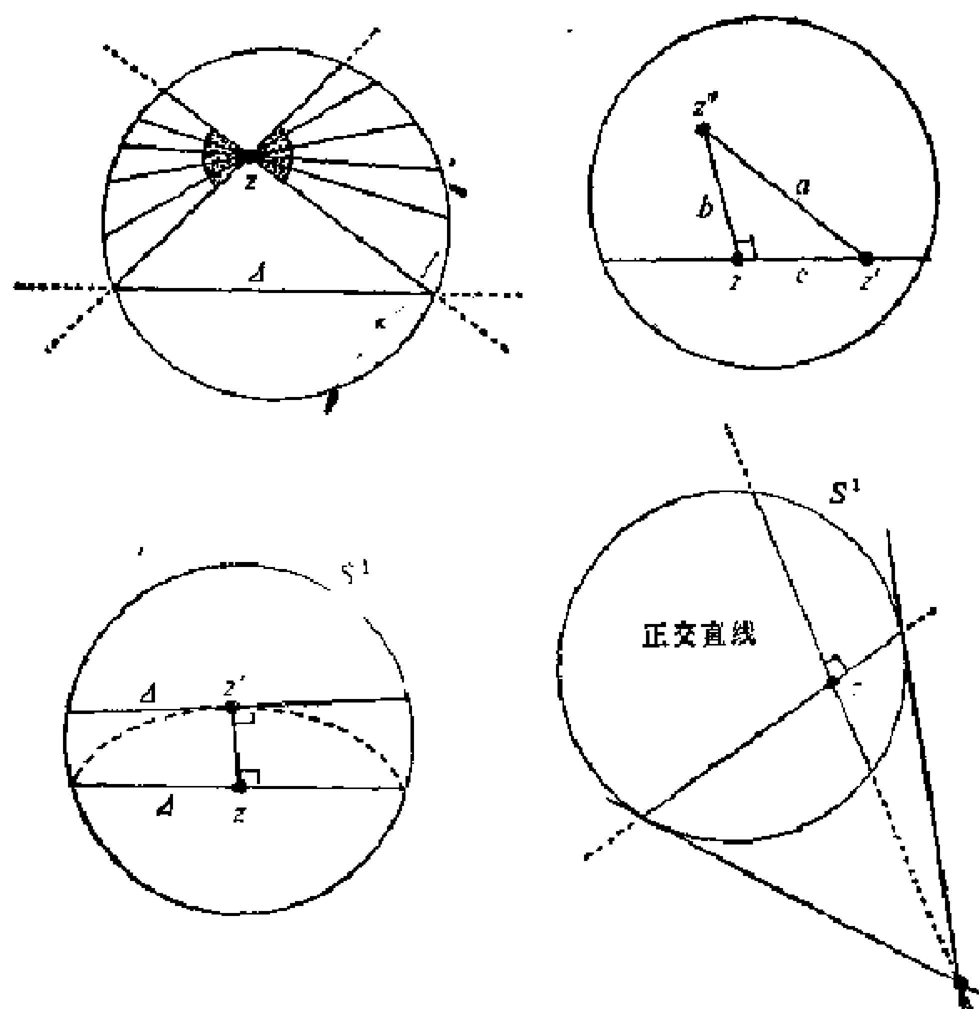


图 19.3.2。

19.3.3 例

19.3.3.1 到直线的距离. 假设在 19.3.1 中 $\alpha=\pi/2$（注意 19.2.9，几何条件是当 $n=2$ 时以 z 为起点的两条直线关于圆 S' 共轭，这里关于圆周共轭的意义为 10.7.11 所述）；则

$$\operatorname{ch} a=\operatorname{ch} b \operatorname{ch} c \text{ 从而 } a \geqslant b,$$

等式仅当 $z'=z$ 时成立。这样就又完整地得出了 9.2.2，因为给定一条直线 Δ 和一点 z'' 后，由紧性可知存在一点 $z\in\Delta$ 使 $d(z,z'')=d(z'',\Delta)$（参见 19.2.6）。

这里要注意的是，与欧几里得平面的情形相反，若 $z\in\Delta$，$z'\in\Delta'$ 使 $d(z,z')=d(\Delta,\Delta')$，且 Δ，Δ' 与直线 $\langle z,z'\rangle$ 在 z，z' 处的夹角正好是 $\pi/2$，则当 $w\in\Delta\backslash z$ 时有 $d(w,\Delta')>d(\Delta,\Delta')$。亦可参见 19.8.8 和 19.8.11。

19.3.3.2 曲线的长度·圆· 容易在极坐标下算得曲线的长度，见 19.8.18。若将集合 $\{z\in\mathscr{B}: d(z,z_0)=r\}$ 称为双曲平面上的圆，则圆的周长是 $2\pi \operatorname{sh} r$；这一周长在欧几里得平面上是 2π，在球面 S^2 上是 $2\pi\sin r$。在 $\mathscr{B}$ 中这些圆表现为椭圆，见 19.8.12，但在模型 $\mathscr{C}$ 或 $\mathscr{H}$ 中它们也是欧氏圆：见 19.6.8.2。

19.3.4 三角形. 根据 19.3.1，直接计算可知，对双曲平面上边长为 a，b，c，内角为 α，β，γ 的三角形，有下列公式：

19.3.5

$$\frac{\sin\alpha}{\operatorname{sh} a}=\frac{\sin\beta}{\operatorname{sh} b}=\frac{\sin\gamma}{\operatorname{sh} c},$$

$$\cos\alpha=\sin\beta\sin\gamma \operatorname{ch} a-\cos\beta\cos\gamma.$$

关于欧氏或球面的三角形所讨论过的内容，读者都可在 $\mathscr{B}$ 中进行讨论：如公式 10.3，10.13.2，18.6.13，给定边长和内角的三角形的实现，（在等距下）相等的情形，中线、角平分线、高线的交点。关于角平分线，可以研究它们的交点和 Brianchon 定理之间的联系：参见 16.2.13 和 [CR 3] 的卷首插图。关于给定三内角的三角形，我们看到，由 19.3.5 可求出边长；但在 19.5.4 中还将给出一个有趣的附加公式。亦可参见 [CR 3] 第 XII 章的分析方法。

19.4 等距变换群

19.4.1 $\mathscr{B}$ 中的等距变换全体所成的群 $\mathrm{Is}(\mathscr{B})$，当然包含 $G(n)$（参见 19.2.1）在 Φ 下所得的群，后面这个群不妨仍记为 $G(n)$：事实上只须应用 19.2.3 和 19.2.5 即可，因为 $\mathscr{B}$ 的度量是通过 q 定义的，而根据定义 $G(n)$ 又是保持 q 不变的。 在看来稍有些兜圈子、但对其它的目的颇有裨益的论证之后，我们就会看到，其实有 $\mathrm{Is}(\mathscr{B})=G(n)$。

19.4.2 超平面对称． 垂直平分集． 设 η 使 $q(\eta)<0$；则根据 13.4.7 和 19.2，$\eta^{\perp}$ 是 $\mathbf{R}^{n+1}$ 的超平面，$\eta^{\perp}\cap\mathscr{P}$ 是 $\mathscr{P}$ 的超平面．它在 $\mathscr{B}$ 中给出超平面 $\Phi(\eta^{\perp}\cap\mathscr{P})$．$P^n(\mathbf{R})$ 的伴随正交对称（参见 13.6.6，14 7 4.）是在 $\mathrm{PO}(\alpha)=G(n)$ 中的；这是 $\mathscr{P}$ 的一个对

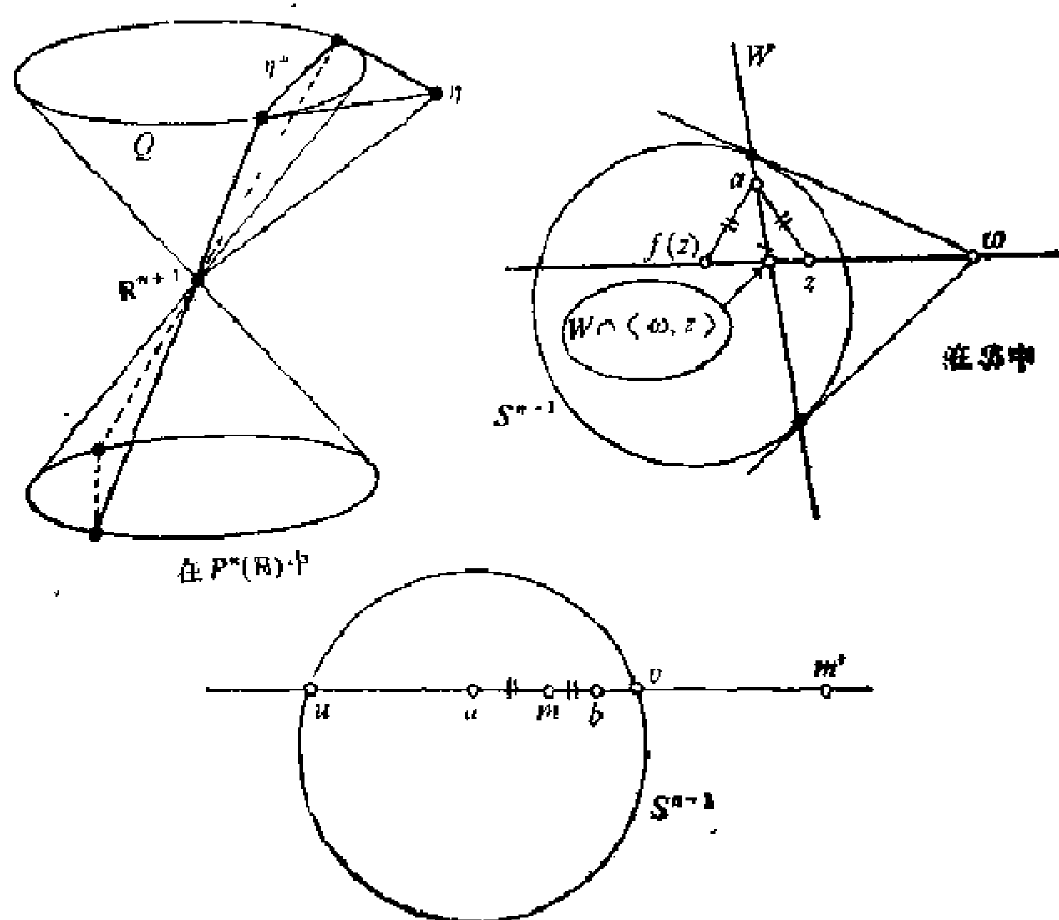


图 19.4.2.

合对称且其所有的不动点就是 $\eta^{\perp}\cap\mathscr{P}$ 的不动点。在 $\mathscr{B}$（或 $\mathscr{P}$）中，称这样的对称为关于超平面 $W=\Phi(\eta^{\perp}\cap\mathscr{P})$（或 $\eta^{\perp}\cap\mathscr{P}$）的超平面对称。特别有 $d(a,z)=d(a,f(z)),\forall a\in W,\forall z\in\mathscr{B}$。反过来，对满足 $a\neq b$ 的任何 $a,b\in\mathscr{B}$ 存在 $\mathscr{B}$ 中唯一的超平面 W，使 W 所定义的超平面对称将 a，b 互换；而且 $W=\{z\in\mathscr{B}: d(a,z)=d(b,z)\}$。$W$ 也称为 a 和 b 的垂直平分超平面。为说明这一点，只须取 $\xi\in\Lambda(a)$，$\xi'\in\Lambda(b)$ 使 $q(\xi)=q(\xi')$ 和 $\eta=\xi-\xi'$ 即可；根据 13.4.7，有 $q(\xi-\xi')<0$。于是根据 13.6.6.2，$\mathscr{B}$ 中的伴随超平面 W 的对称将 a 和 b 互换；而且，根据 19.2.5，对 $z=\Phi(\mathbf{R}\zeta)$ 有 $d(a,z)=d(b,z)$ 等价于 $P(\xi,\zeta)=P(\xi',\zeta)$，即 $P(\xi-\xi',\zeta)=0$，这正好就是 $\zeta\in(\xi-\xi')^{\perp}$。

从几何的角度说，在 $\mathscr{B}$ 也可这样地定义超平面对称：设 ω 是 W 关于 S^{n-1} 的极（参见 10.7.11，若 $W\in\mathscr{B}$ 的中心 O，则 ω 在 $W^{\perp}$ 方向的无穷远处），则超平面 W 的对称 f 将 $z\in\mathscr{B}$ 映成直线 $\langle f,z\rangle$ 上的点 $f(z)$，使 ω，$\langle\omega,z\rangle\cap W$，$z$，$f(z)$ 四点成调和分割。事实上这一点可由 14.7.4 和 15.5 推出。

19.4.3 例：中点. 19.4.2 和 19.3.3.1 表明，给定不同的两点 $a,b\in\mathscr{B}$ 后，存在唯一的一点 m 使 $d(m,a)=d(m,b)=\frac{1}{2}d(a,b)$，这一点就是线段 $[a,b]$ 和 a，b 的垂直平分线的交点。从几何的角度，可将该点作为直线 $\langle a,b\rangle$ 的对合的二重点而作出，其中一对点是 (a,b)，另一对是 $\langle a,b\rangle$ 和 S^{n-1} 的交点 (u,v)。

19.4.4 命题. 设 $(z_i)_{i=1,\cdots,n+1}$ 是 $\mathscr{B}$ 中仿射独立的点；则由 $d(z,z_i)=d(z',z_i)\ \forall i=1,\cdots,n+1$ 可推出 $z=z'$。设 $(z_i)_{i=1,\cdots,k}$ 和 $(z'_i)_{i=1,\cdots,k}$ 是 $\mathscr{B}$ 中两个 k 元组，并使

$$d(z_i,z_j)=d(z'_i,z'_j)\ \forall i,j=1,\cdots,k;$$

则存在 $f\in G(n)$ 使 $f(z_i)=z'_i\ \forall i=1,\cdots,k$。

由于上述关于垂直平分集的讨论，我们可以完全和证明 9.7.1 时一样地进行讨论。

19.4.5 推论. $\mathrm{Is}(\mathscr{B})=G(n)$。

19.4.5.1 注. 特别可知 $\mathrm{Is}(\mathscr{B})$ 是二点可迁的，参见 9.1.7.

19.4.6 一些推论.

19.4.6.1 由 19.4.4 的证明可知，$\mathrm{Is}(\mathscr{B})$ 中的每一元素是至多 $n+1$ 个超平面对称的乘积；还可注意到，当 $\mathbf{R}^{n+1}$ 的超平面是 $\eta^{\perp}$ 而 $q(\eta)>0$ 时，由 13.7.12 可得出对称，且它们不一定是超平面对称，其实，在这种情形所得出的是绕 $\mathscr{B}$ 的一点，即绕 $\Phi(\mathbf{R}\eta)$ 的对称。

19.4.6.2 由 13.7.1 可知，$\mathscr{B}$ 中两个 k 维子空间总是在某一个 $f\in\mathrm{Is}(\mathscr{B})$ 下互为映象的. 由此还可知，d 在一个这样的子空间上诱导的度量，就是 k 维双曲空间的度量（可取一个过 $\mathscr{B}$ 的原点 O 的子空间）。

19.4.6.3 如在 18.5.8 中一样，可以证明在不计数量因子差别的条件下，d 是 $\mathscr{B}$ 上唯一在 $\mathrm{Is}(\mathscr{B})$ 下不变的度量.

19.4.6.4 群 $\mathrm{Is}(\mathscr{B})$ 同构于 $\mathrm{M\ddot{o}b}(n-1)$（参见 18.10），但它作用在 $\mathscr{B}$（或 $\mathscr{P}$，或下面的 $\mathscr{C}$ 和 $\mathscr{H}$）上的方式与作用在 S^{n-1} 上时很不相同。

19.4.6.5 一点 x 的稳定子群 $\mathrm{Is}_x(\mathscr{B})$ 自然同构于切空间的正交群 $O(T_x\mathscr{B})$，参见 19.2.7；而且在 0 处，这个稳定子群等同于 $O(n)$，因为我们可取 $\xi=(0,1)$，这时就有 $\xi^{\perp}=\mathbf{R}^n$.

19.4.6.6 群 $\mathrm{Is}(\mathscr{B})$ 是保角的，因为根据定义 $G(n)$ 是保角的(参见 19.2.7)。

19.4.7 $\mathrm{Is}(\mathscr{B})$ 的紧子群. 这样的子群容有一个对所有元素共同的不动点；事实上，由 19.3.1 容易验证两点的中点（参见 19.4.3）满足 9.8.6.5 的条件.

19.5 $\mathscr{B}$ 的规范测度

19.5.1 命题. $\mathscr{B}$ 上每一在 $\mathrm{Is}(\mathscr{B})$ 下不变的测度必定形如 $k\lambda\omega$，其中 $k\in\mathbf{R}_+^*$，ω 是 $\mathbf{R}^n$ 的 Lebesgue 测度在 $\mathscr{B}$ 上的限制，λ 是映射 $z\longmapsto(1-\|z\|^2)^{-(d+1)/2}$. $k=1$ 时，即关于 ω 在 0 处的比例

因子为1的上述测度，称为 $\mathscr{B}$ 的规范测度.

$\mathscr{B}$ 上每一在 $\mathrm{Is}(\mathscr{B})$ 下不变的测度形如 $g\omega$，其中 $g:\mathscr{B}\to\mathbf{R}_+^*$ 连续，这一事实已在 2.7.4.4 和 18.7.3.4 中提及；现在我们再利用下述事实：$\mathrm{Is}(\mathscr{B})$ 在 $\mathscr{B}$ 的每点沿每一方向都是连续作用的. 这也说明了两个不变测度总是成比例的，因为 $\mathrm{Is}(\mathscr{B})$ 是可迁的，从而函数比例因子应是常值. 剩下只要说明 $\lambda\omega$ 确实是在 $\mathrm{Is}(\mathscr{B})$ 下不变的. 而它在稳定子群 $\mathrm{Is}_0(\mathscr{B})=O(n)$ 下是不变的（参见 19.4.6.5），因为 $\|\cdot\|^2$ 是在 $O(n)$ 下不变的；因此只须证明对任一 $z\in\mathscr{B}$ 存在 $f\in\mathrm{Is}(\mathscr{B})$ 使 $f^*(\lambda\omega)=\lambda\omega$ 且 $f(0)=z$. 我们甚至可以仅考虑形如 $(x,0,\cdots,0)$ 的 z；取

$$f:(x_1,\cdots,x_n)\longmapsto\left(\frac{\operatorname{ch}t\,x_1+\operatorname{sh}t}{\operatorname{sh}t\,x_1+\operatorname{ch}t},\ \frac{x_2}{\operatorname{sh}t\,x_1+\operatorname{ch}t},\cdots,\right.$$

$$\left.\frac{x_n}{\operatorname{sh}t\,x_1+\operatorname{ch}t}\right),$$

这是如下定义的 $F:\mathbf{R}^{n+1}\to\mathbf{R}^{n+1}$ 在 $\mathscr{B}$ 上的效应：

$$(x_1,\cdots,x_n,x_{n+1})\longmapsto(\operatorname{ch}t\,x_1+\operatorname{sh}t\,x_{n+1},x_2,\cdots x_n,$$

$$\operatorname{sh}t\,x_1+\operatorname{ch}t\,x_{n+1}),$$

这个 f 显然是使 $q=-\sum_{i=1}^{n}x_i^2+x_{n+1}^2$ 不变的. 计算 f 在 $0=(0,\cdots,0)$ 处的偏导数 Jacobi 矩阵后可知，Jacobi 行列式 $\det f'(0)$ 为 $(\operatorname{ch}t)^{-(d+1)}$，因而 $f^*(\lambda\omega)=\lambda\omega$，这对任何 t 都对；而由 $f(0,\cdots,0)=(\operatorname{sh}t/\operatorname{ch}t,0,\cdots,0)$ 可得出 $(x,0,\cdots,0)\in\mathscr{B}$.

19.5.2 一个例子. 设 $\mathscr{T}$ 是双曲平面 $\mathscr{B}$ 上的三角形，其内角为 $\alpha,\beta,\pi/2$；则

19.5.3 面积$(\mathscr{T})=\dfrac{\pi}{2}-\alpha-\beta$.

由 $\mathrm{Is}(\mathscr{B})$ 的可迁性，可对顶点坐标为 $(0,0)$，$(u,0)$，$\left(u,\dfrac{u}{\sin\alpha}\right)$的三角形进行计算；事实上，在 0 和 $(u,0)$ 处的角为 α 和 $\pi/2$，因为对 $\mathscr{B}$ 和 $\mathbf{R}^2$ 来说，在 $(0,0)$ 处的角是一样的，在 $(u,0)$ 处的角也都是 $\pi/2$，于是由 19.2.6 有：$u=\operatorname{th}b$，其中 b 是

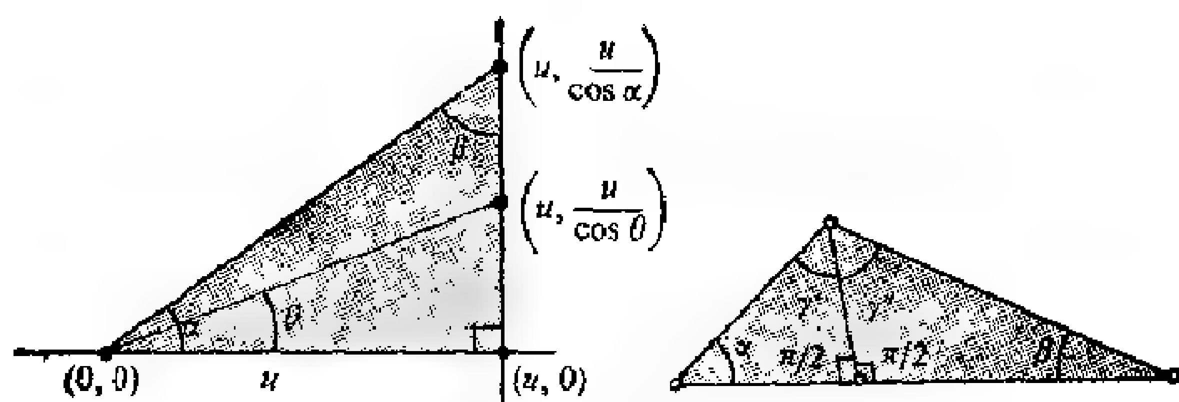


图 19.5.3.

$\mathscr{S}$ 中角 β 的对边，根据 19.3.5 有 $\operatorname{ch} b = \frac{\cos\beta}{\sin\alpha}$. 在极坐标 (ρ, θ) 中，规范测度为 $(1-\rho^2)^{-3/2}\rho d\rho d\theta$，由此相继可得：

$$
\begin{aligned}
\text{面积}\ (\mathscr{S}) &= \int_0^\alpha \int_0^{u/\cos\theta} \rho(1-\rho^2)^{-3/2} d\rho d\theta \\
&= \int_0^\alpha [(1-\rho^2)^{-1/2}]^{u/\cos\theta} d\theta \\
&= \int_0^\alpha \left[\left(1-\frac{u^2}{\cos^2\theta}\right)^{-1/2} - 1\right] d\theta \\
&= \int_0^\alpha \frac{\cos\theta}{\sqrt{\cos^2\theta - u^2}} d\theta - \alpha \\
&= \left[\operatorname{Arc\,sin}\left(\frac{\sin\theta}{\sqrt{1-u^2}}\right)\right]_0^\alpha - \alpha \\
&= \operatorname{Arc\,sin}(\sin\alpha \operatorname{ch} b) - \alpha \\
&= \operatorname{Arc\,sin}(\cos\beta) - \alpha = \frac{\pi}{2} - \beta - \alpha.
\end{aligned}
$$

19.5.4 推论. 对双曲平面上任一内角为 α, β, γ 的三角形 $\mathscr{S}$ 有

$$\text{面积}(\mathscr{S}) = \pi - \alpha - \beta - \gamma.$$

依据 19.3.3.1 可将该三角形分成两个直角三角形，并对其中每个直角三角形应用 19.5.3.

19.5.5 注. 一般公式见 18.3.8.6，19.5.4 是它的很特殊的情形，因而亦可注意到，对任何三角形有 $\alpha + \beta + \gamma < \pi$.

19.6 共形模型 $\mathscr{C}$

19.6.1 考虑关于北极 ν 的球极射影 $f: S^n\backslash\nu \to \mathbf{R}^n$，并记 S^n 的开南半球为 Σ：

$$\Sigma = \{(z, t) \in S^n \subset \mathbf{R}^{n+1}: t < 0\}.$$

记 $\mathbf{R}^{n+1}$ 到 $\mathbf{R}$ 上的射影 $(z, t) \longmapsto z$ 为 π；限制在 Σ 上后，π 是双射，记其逆为 g。令

$$\Xi = f \circ g: \mathscr{B} \to \mathscr{B}, \quad \Omega = \Xi^{-1}: \mathscr{B} \to \mathscr{B}.$$

映射 Ξ，Ω 都是双射。将赋有由 $\delta(x, y) = d(\Omega(x), \Omega(y))$ 定义的度量 δ 的集合 $\mathscr{B}$ 称为双曲空间的（共形）模型 $\mathscr{C}$，其中 d 是 $\mathscr{B}$ 的双曲距离。

19.6.2 在 $\mathscr{C}$ 中通过 Ξ，Ω 的推衍定义直线、射线、切向量和夹角；要注意，这里涉及的是与 $\mathscr{B}$ 中相同的集合，但直线不再是仿射直线。事实上，若 Δ 是 $\mathscr{B}$ 的一条直线，其载体直线 $\bar{\Delta}$ 与 S^{n-1} 交于 u，v，则 $g(\bar{\Delta})$ 是 S^n 中一个与 S^{n-1} 在 u，v 处交成直角的圆，因而 $\Xi(\bar{\Delta}) = f(g(\bar{\Delta}))$ 也是 $\mathbf{R}^n$ 中一个与 S^{n-1} 在 u，v 处交成直角的圆（参见 18.1.4.3）；因而 $\mathscr{C}$ 的直线是正交于 S^{n-1} 的圆与 $\mathscr{B}$ 相交而得的开圆弧。射线则是这些圆的半开弧。

19.6.3 我们要证明 $\mathscr{C}$ 中的角度是与在 $\mathbf{R}^n$ 中的角度一样的，从而说明"共形模型"一词的合理性。为此，我们注意到：

19.6.4 **引理**。设 h 是 $\mathscr{B}$ 中关于超平面 W 的超平面对称，则当 W 关于 S^{n-1} 的、使 S^{n-1} 稳定的极点存在时，$\Xi \circ h \circ \Omega$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中关于该极点的反演在 $\mathscr{C}$ 上的限制，当该极点不存在时，W 经过 $\mathscr{C}$ 的中心 0 且 $\Xi \circ h \circ \Omega = h$ 是关于超平面 W 的欧几里得对称。

后一种情形是显然的；现设 w 是 W 关于 S^{n-1} 的极点。将 $\mathbf{R}^{n+1}$ 中经过 W 并与 $\mathbf{R}^n$ 正交的超平面记为 $\overline{W}$；它是 w 关于 S^n 的极线。若 $z \in \mathscr{B}$，$\theta = \langle w, z \rangle \cap W$，则由 19.4.2 有 $[x, \theta, z, h(x)] = -1$，因而根据 14.5.2.6，$g(z)$ 和 $g(h(z))$ 与 w 共线。因此经过 S^n 中以 w 为极点的反演可将 $g(z)$ 映成 $g(h(z))$（参见 18.10.1.4）；

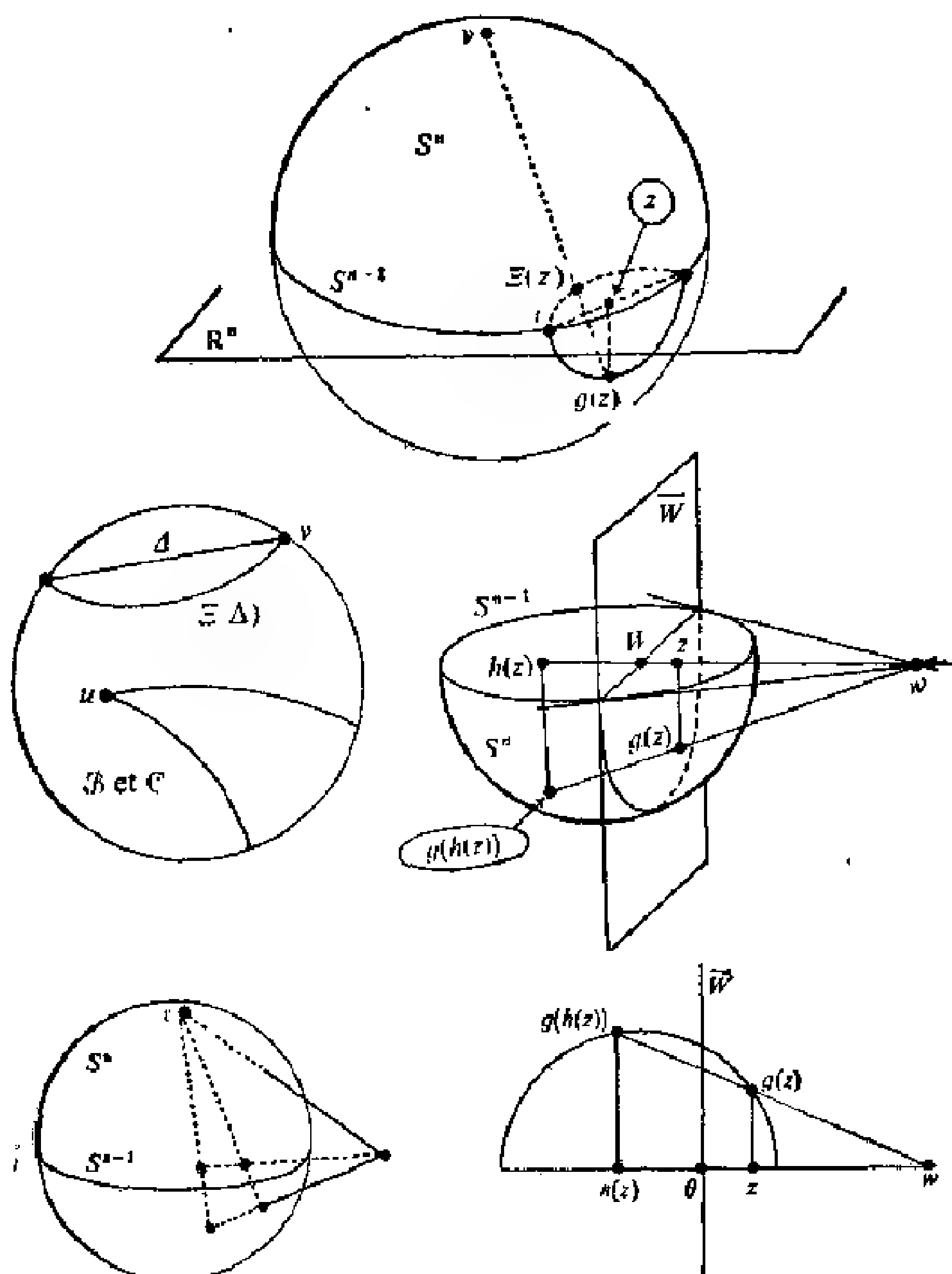


图 19.6.2.

但 $f\circ k\circ f^{-1}$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中使 S^{n-1} 稳定的以 w 为极点的反演。

19.6.5 定理. 群 $\mathrm{Is}(\mathscr{C})$ 是由 $\mathbf{R}^n$ 中使 $\mathscr{C}$ 稳定且极点在 $\mathscr{C}$ 内的反演在 $\mathscr{C}$ 上的限制，以及以 0 为中心的超平面对称所生成的。

由 19.6.4 和 19.4.6.1 即可得证。

19.6.6 从而我们看到，$\mathrm{Is}(\mathscr{C})$ 可作为群 $\mathrm{M\ddot{o}b}(n-1)$ 在S^{n-1}的内部 $\mathscr{C}$ 上的扩张；或者说，$\mathrm{M\ddot{o}b}(n-1)$ 是 $\mathrm{Is}(\mathscr{C})$ 在 $\mathscr{C}$ 的边界 S^{n-1} 上的连续拓展.

19.6.7 推论. 模型 $\mathscr{C}$ 是共形的，在其中双曲角度和欧氏角度是一致的.

事实上，对 $\mathscr{B}$ 而言，欧氏角度和双曲角度是在 0 处一致的，因而对 $\mathscr{C}$ 而言也在 0 处一致；但由 19.6.5，8.6.6 和 10.8.5.2 可知，$\mathrm{Is}(\mathscr{C})$ 是保角的.

19.6.8 在双曲平面情形的例. 于是我们可以来考虑 $\mathscr{C}$ 中的角度。这是非常实用的.

19.6.8.1 借助于 19.5.4 就可以计算一个三角形 $\mathscr{C}$ 的面积. 容易作出这样三个圆，它们都与 S^1 正交，而且在与 S^1 的交点处两两相切，从而可看出，存在 $\mathscr{C}$ 的(或 $\mathscr{B}$ 的!) 三角形，它们的内角

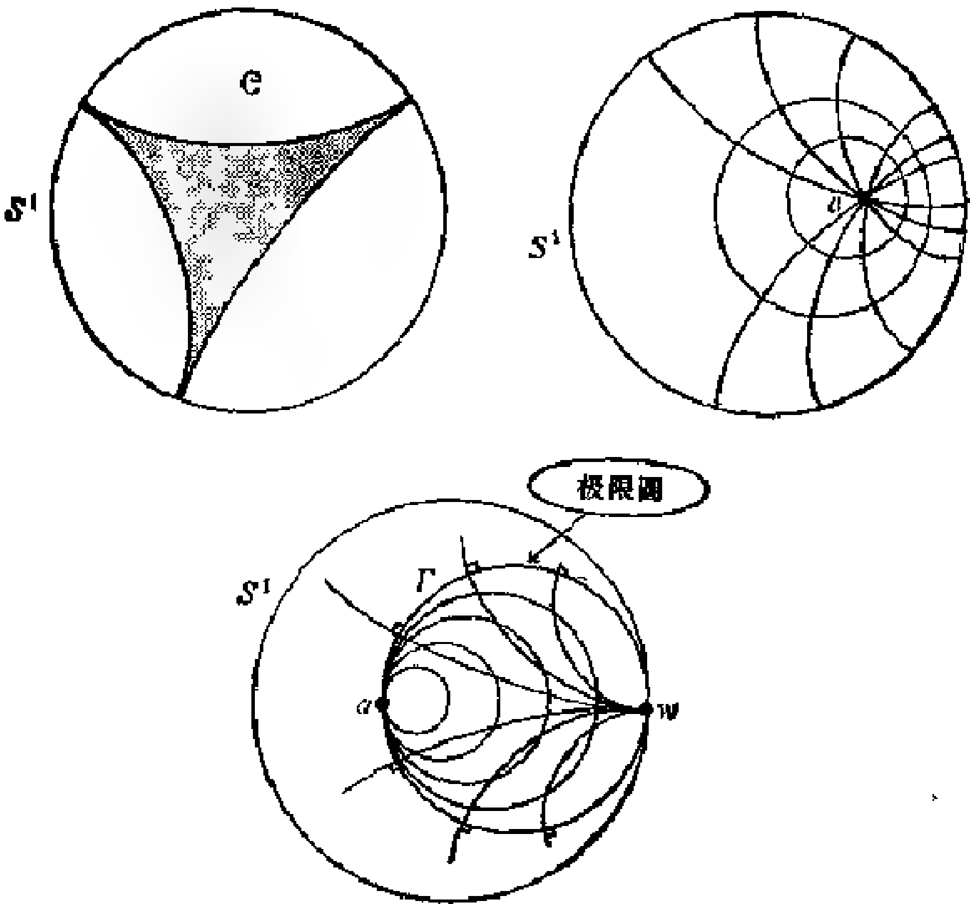


图 19.6.8.

是要多小有多小的，特别是，$\mathscr{C}$ 的三角形的面积的上界等于 π，且不能达到。注意图中的阴影部分，其各边的长度都是无限的，然而面积却是有限的，等于 π。

19.6.8.2 圆。 根据 19.3.3.1，以 $a\in\mathscr{C}$ 为圆心的圆（参见 19.3.3.2）必与所有过 a 的直线正交；根据 10.10 可知这些圆就是在 $\mathscr{C}$ 内部的一个圆束，其中一个圆是 S^1，一个极限点为 a，于是，$\mathscr{C}$ 的圆也都是欧氏圆。

19.6.8.3 极限圆。 本小节旨在解释所有严格落在 S^1 内的圆；在 S^1 内，但在 w 处与 S^1 相切的圆代表什么？我们看到，一个这样的圆 Γ 是与 $\mathscr{C}$ 中任一以 w 为无穷远点的直线正交的；Γ 因而是一个圆心在无穷远处的圆，但它不是一条直线。当然可以把 Γ 作为所有经过 a、圆心在直线 $\langle a,w\rangle$ 上延伸至无穷远处的圆的极限。$\mathscr{C}$ 的这些曲线称为极限圆；它们在双曲几何的各种应用中起着重要作用，例如参看［A-A］第 52 页和附录 20。

在模型 $\mathscr{B}$ 中，读者可证明极限圆（惊人的圆！）恰恰就是与 S^1 超切的椭圆。

19.6.9 公式。 19.6.1 的映射 Ω 由下式给出：

$$x\longmapsto \frac{2x}{1+\|x\|^2}.$$

$n=2$ 时，若将 $\mathbf{R}^2$ 与 $\mathbf{C}$ 等同起来，则可预期 $\mathrm{Is}(\mathscr{C})$ 的元素单单由复变量 z 表出；事实上，我们看到，$\mathrm{Is}^+(\mathscr{C})$ 的元素是限制在 $\mathscr{C}=\{z:|z|<1\}$ 上的 $\mathbf{C}\to\mathbf{C}$ 映射，它可写为（试与［CH 2］第 187 页比较，并见 6.8.16）

$$z\longmapsto e^{i\theta}\frac{z+z_0}{1+\bar{z}_0 z},\ \theta \text{ 为实数}, |z_0|=1.$$

19.6.10 $\mathscr{C}$ 中的度量。 我们很自然地要在模型 $\mathscr{C}$ 上借助于欧几里得结构来计算两点的距离。设 $a,b\in\mathscr{B}$，u，v 是 $\langle a,b\rangle$ 与 S^{n-1} 的交点；则有（参看 19.2.5）$d(a,b)=1/2|\log([u,v,a,b])|$。从而由 g 的（参见 19.6.1）和交比的（参见 6.2.4）定义，又因（见图

19.6.10) $\left(\frac{au}{av}\right)^2=\frac{g(a)u}{g(a)v}$ 和 $\left(\frac{bu}{bv}\right)^2=\frac{g(b)u}{g(b)v}$，就有

$$[u, v, a, b]^2=[u, v, g(a), g(b)].$$

根据 18.10.7 的证明，有

19.6.11 $\delta(x, y)=\left|\log\left(\frac{xu}{xv}\Big/\frac{yu}{yv}\right)\right|, \forall x, y\in\mathscr{C},$

其中 u, v 表示经过 x 和 y 且与 S^{n-1} 正交的圆与 S^{n-1} 的交点。其实 18.10.7 中的讨论表明 $\mu(a, b, c, d)$ 是 $\mathbf{R}^n$ 在一切反演下的不变量，特别是在球极射影下的不变量。亦可参看 16.8.6.

例：由公式 19.6.11 出发可以比 19.6 8.2 中更严密地说明 $\mathscr{C}$ 中的圆的性态.

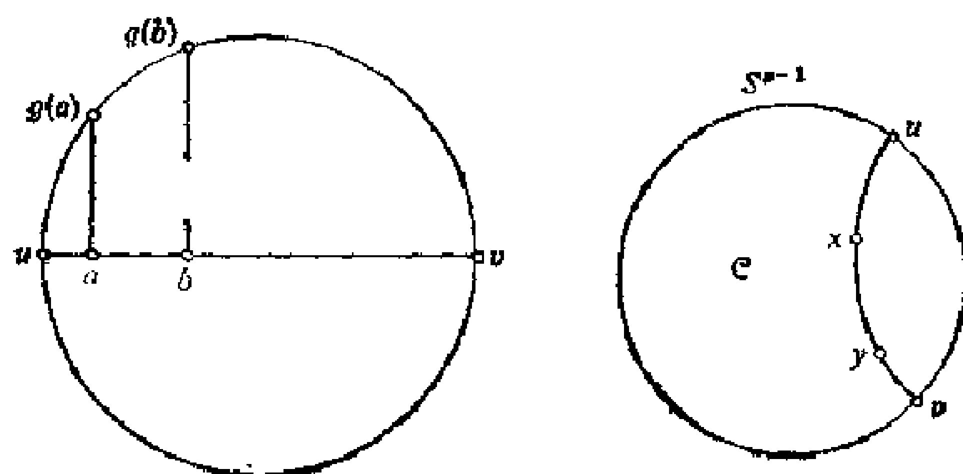


图 19.6.10

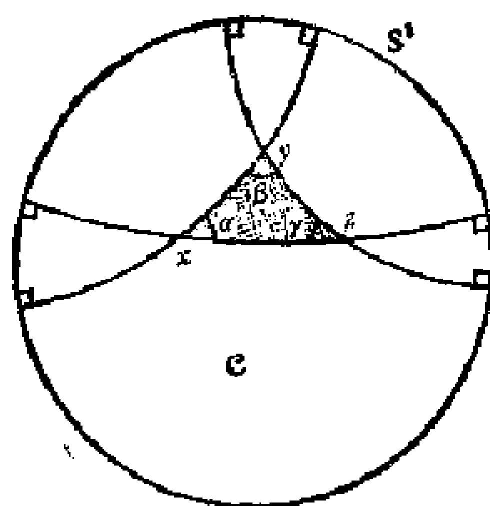


图 19.6.11

19.6.12 **双曲铺嵌.** 设 p, q, r 是三个 $\geqslant 3$ 的整数并且 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}<1$；根据 19.3.4，存在双曲平面 $\mathscr{C}$ 上的三角形 $\mathscr{S}$，其内角为 $\alpha=\pi/p$, $\beta=\pi/q$, $\gamma=\pi/r$；可以证明关于 $\mathscr{S}$ 的各边的对称生成 $\mathrm{Is}(\mathscr{C})$ 的一个离散子群，由它可铺嵌 $\mathscr{C}$（参看 [RM] 和其中提

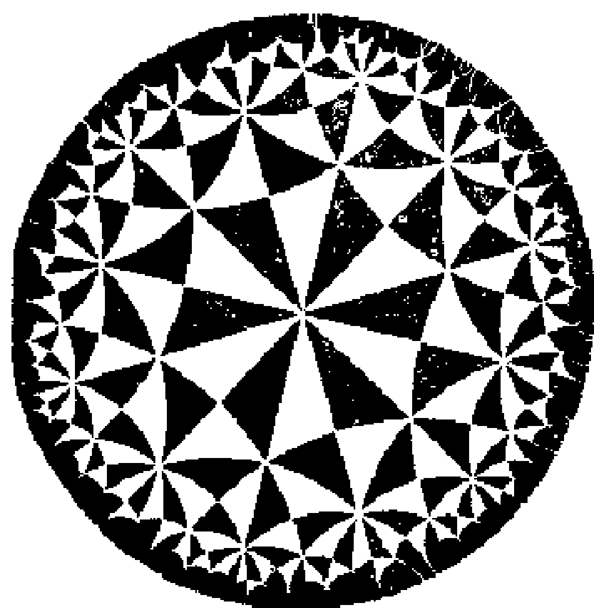


图 19.6.12.1.

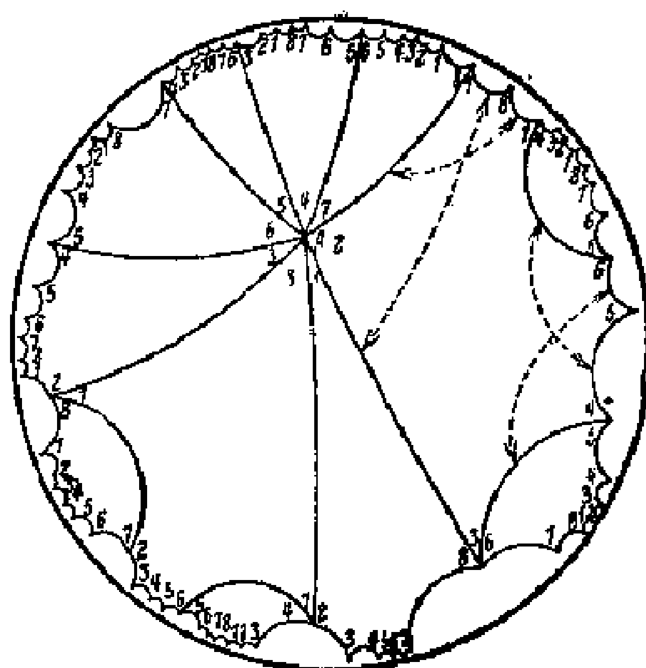


图 19.6.12.2.

Coxeter，《几何导引》，J. Wiley 出版社。

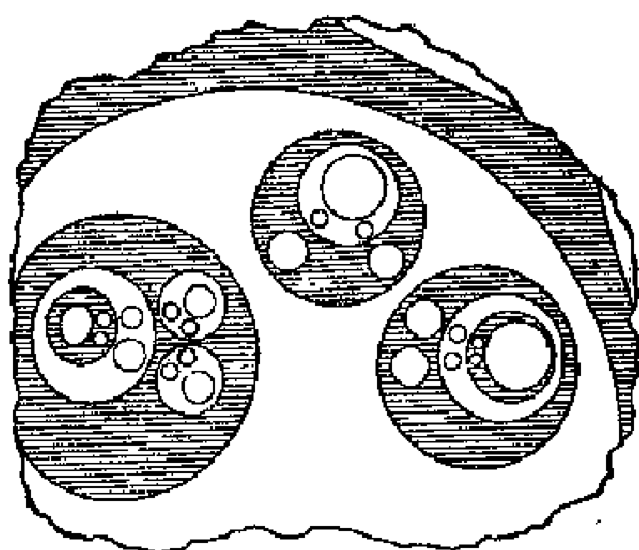


图 19.6.12.3.

见练习）。因此，完全不同于欧氏或椭圆几何的情形（参看1.8.6，1.7.4，1.8.2），双曲平面有无数多种铺砌方式。

另外，除三角形外，也可用多边形作铺砌（图19.6.12.2）；这些铺砌不仅有审美上的情趣，而且在其它方面，特别在分析中（Poincaré 的自守函数，例如参见［KM］）或者在黎曼几何中起着重要的作用。从后者中可由它们构造出具有任意负曲率的紧曲面（这时，取4g边形，并在双曲平面上有4g个相邻的面的铺砌，见12.7.5.4），例如参见［WF］第69页。

关于双曲情形下非周期性铺砌的讨论（参见1.7.?），可参阅

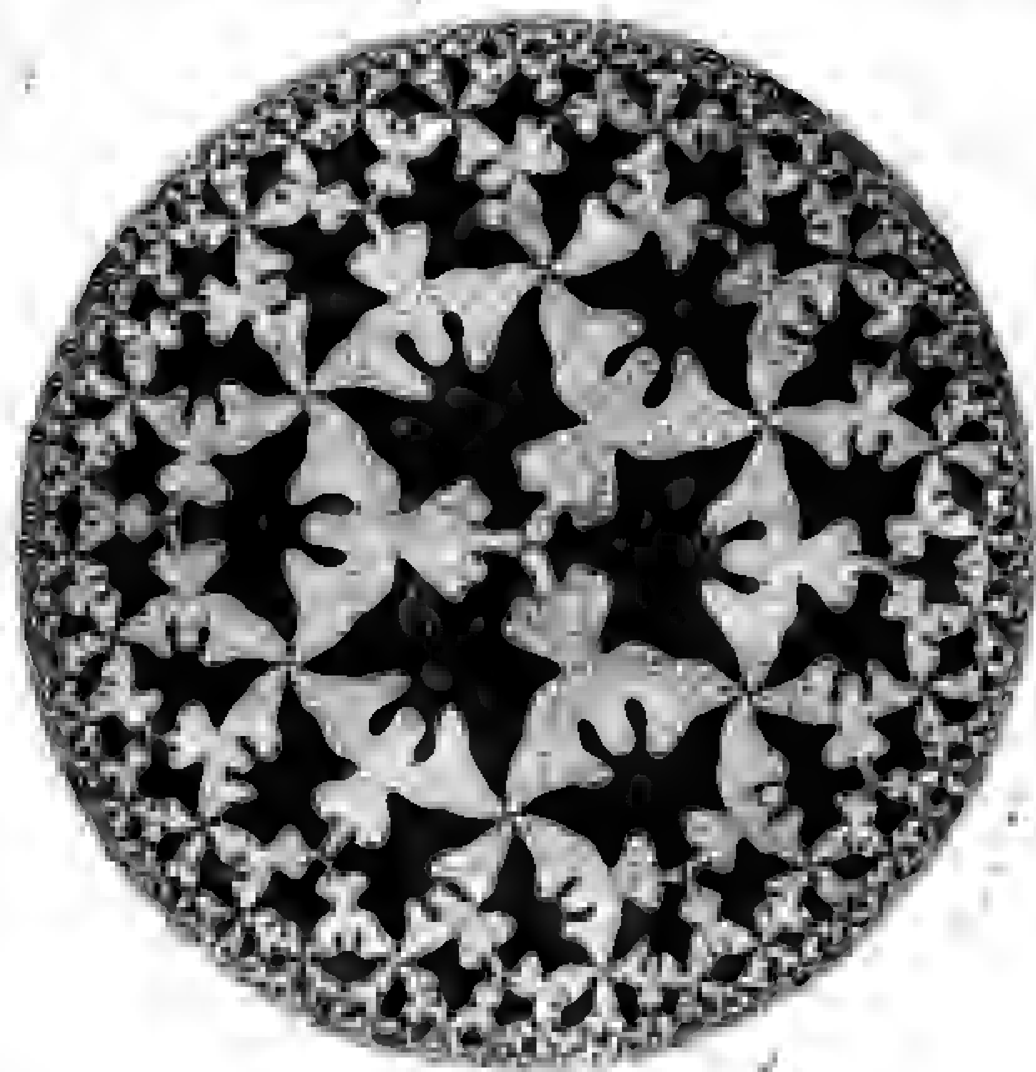


图 19.6.12.4.

M. Escher，"循环极限"，双色木刻，1960.

R. M. Robinson,《双曲平面上不可判定的贴砖问题》,California 大学,Berkeley,预印本。

19.7 跋注、其它模型

19.7.1 模型 $\mathscr{H}$, Poincaré 半空间. 该模型可由模型 $\mathscr{C}$ 经过 $\mathbf{R}^n$ 的一个极点在 S^{n-1} 上的反演得到;这时,构成 $\mathscr{C}$ 的 S^{n-1} 的内部成为一个开半空间 $\mathscr{H}$,其边界为超平面 H,即 S^{n-1} 在上述反演下的象. 将 $\mathscr{H}$ (其上通过上述反演,由 $\mathscr{C}$ 可分别得出度量、角度、直线、射线等概念)称为 Poincaré 半空间 ($n=2$ 时为半平面). 它当然是共形的.

这一模型在有一点上是比 $\mathscr{C}$ 稍为逊色的: 为得到统一的结果和概念,必须在H上添加一个无穷远点; 要不然,比如说就会有两种直线: 圆和正交于H的直线(在 20.1 和 20.6 中还会遇到

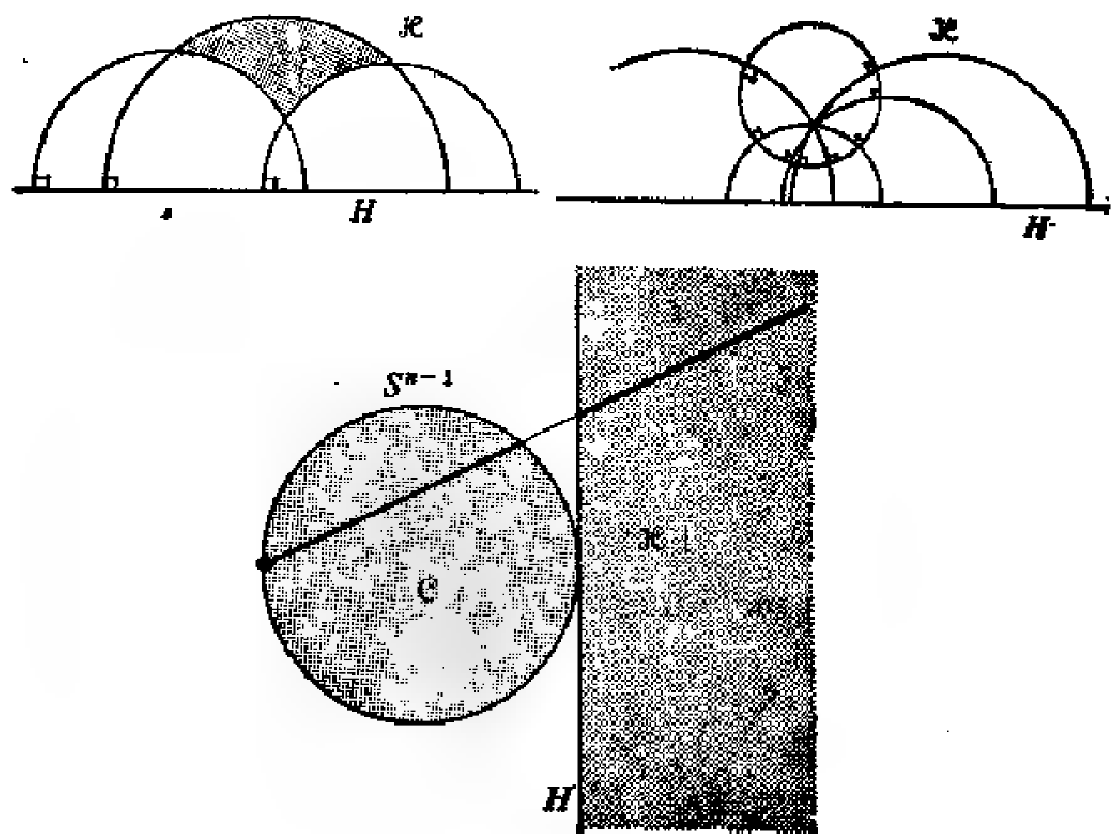


图 19.7.1.

$H\cup\infty$)，甚至连 $\mathrm{Is}(\mathscr{H})$ 也不是拓展到H上（参见 19.6.6），而仅仅是拓展到$H\cup\infty$上。

反过来，在许多情形下，这一模型又是所有模型中计算最简便的；$n=2$ 的情形尤为理想，在这一模型的基础上，我们可以给出双曲几何的初等阐述．最好的做法是取

$$\mathscr{H}=\{z\in\mathbf{C}:\mathrm{Re}(z)>0\};$$

于是 $\mathrm{Is}(\mathscr{H})$ 的元素是

$$z\longmapsto\frac{az+b}{cz+d},\ a,b,c,d\in\mathbf{R},\ ad-bc>0$$

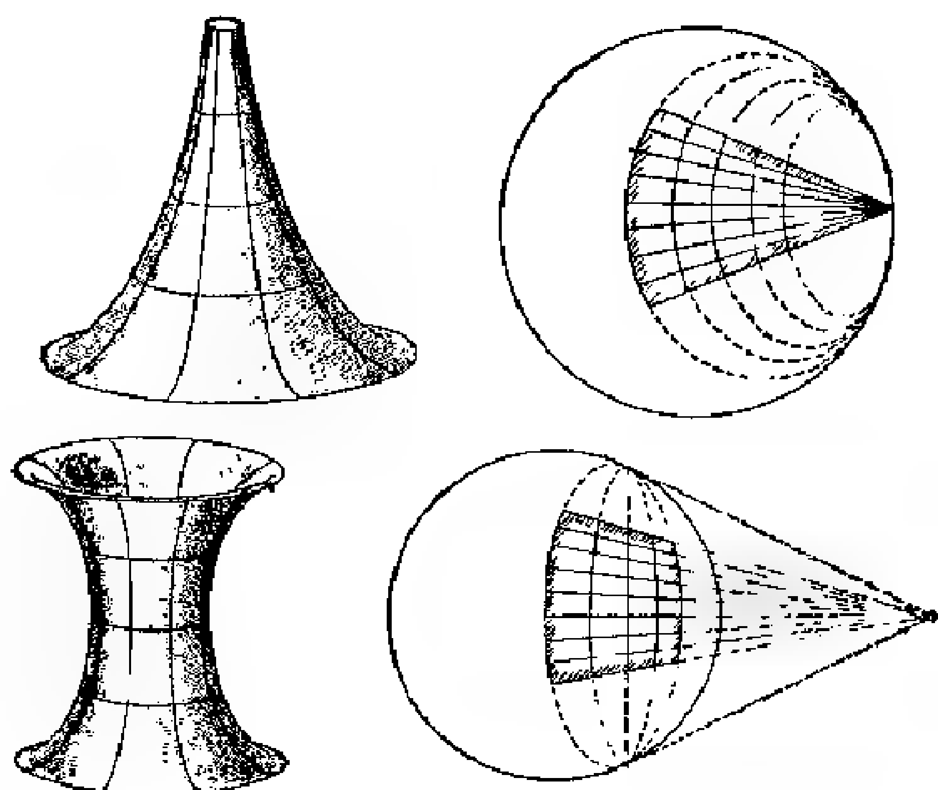
和
$$z\longmapsto\frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d},\ a,b,c,d\in\mathbf{R},\ ad-bc<0$$

（由这种写法很容易看出 $\mathrm{Is}(\mathscr{H})$ 是同构于 $\mathrm{GP}(1;\mathbf{R})$ 的，参见 18.10.4 和 5.2.4）．不变测度很简单，就是

$$\frac{dxdy}{y^2}.$$

19.7.2 其它模型． 若要仿照第 18 章的做法，就该把 $\mathbf{R}^{n+1}$ 中方程为 $q(\xi)=1$ 的超曲面（参见 15.4.3）的一个连通分支E取作模型；但这时E上就不是赋有 $\mathbf{R}^{n+1}$ 的诱导度量所相伴的内蕴度量（参见 9.9.7 和 18.4.3），而得赋有一个黎曼度量，它是通过在每个 T_xE，$x\in E$ 上赋以由 $-q$ 在 $\xi^\perp$ 的限制所诱导的欧氏结构而得到的．为简单起见，考虑 $\mathbf{R}^3$ 的曲面，若要其上由 $\mathbf{R}^3$ 的诱导度量所推得的内蕴度量是双曲度量，则可取如图 19.7.2 所示的旋转曲面；但是这仅仅是局部的模型．而且，Hilbert 的一个定理明确地指出，$\mathbf{R}^3$ 中的任一曲面都不可能整体地实现 $\mathscr{B}$，例如参见［KM］第 476 页．这些模型是 Beltrami 提出的；历史上的 Лобачевский 和 Bolyai 的模型是具有公理性质的．

19.7.3 注． 用到双曲几何的，有分析学，参见［G-G-V］第 IV 章；有数论，参见［SA］；有微分几何，参见［G-K-M］第 195 页；有遍历理论，参见［A-A］；最后还有相对论，其中的 Lorentz 群正是 $n=3$ 时的群 $O(q)$．双曲几何在当前的研究工作中起着很



F. Klein,《高等几何教程》, Springer 出版社.

图 19.7.2.

活跃的作用，特别可参阅《Thurson 关于曲面微分同胚的工作》，Orsay 讨论班 76—77, Astérisque 1979.

有关双曲几何的文献是：[B-K]，很初等但很适合教学需要；[CR3]，其中有很完备的公式表；还有 [GR].

我们在 12.11.4.3 中已提及，等周不等式 12.11.1 可推广到双曲空间.

在下书中可找到双曲几何的公理化叙述：K. Borsuk 和 W. Szmielew,《几何基础》第 VI 章.

19.8 练 习

19.8.1 在椭圆空间中讨论子集

$$\{m; \overline{mm_1} = \cdots = \overline{mm_k}\},$$

其中 m_i 是给定的 k 个点.

19.8.2 设 D, D' 是椭圆空间的两条直线；讨论

$\{m; d(m, D) = d(m, D')\}$（分 $d = 2$ 和 $d \geqslant 2$ 两种情形）.

19.8.3 在椭圆平面上讨论配极三角形的概念.

19.8.4 讨论椭圆平面上三角形的各种相等情形.

19.8.5 将椭圆平面分割成三角形；证明顶点数 σ，边数 α 和三角形数 φ 恒满足

$$\sigma - \alpha + \varphi = 1.$$

19.8.6 证明从椭圆空间到自身的共形映射必是等距变换.

19.8.7 在 $\mathscr{B}$ 中有一个四边形，其三内角都为直角，F边 a 和 b 已知，求第四个内角.

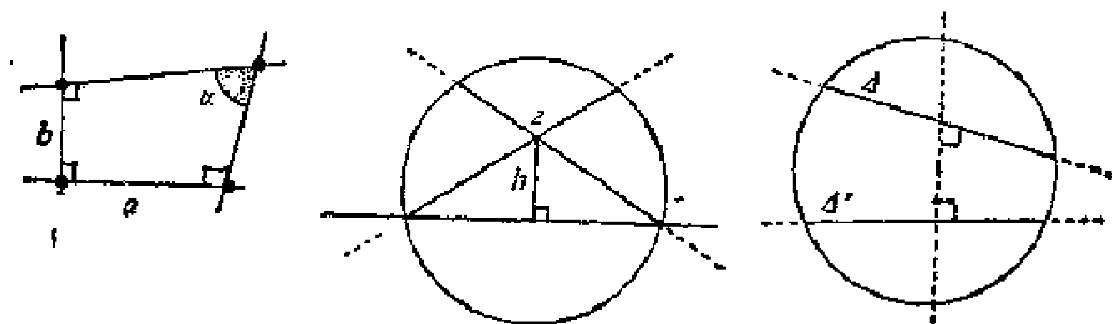


图 19.8.7.

19.8.8 证明：在双曲平面 $\mathscr{B}$ 中，过 z 向 Δ 作的两条端头平行线的夹角（参见 19.3.2）只依赖于 $d(z,\Delta) = h$，并写出 α 与 h 的函数关系.

19.8.9 先在模型 $\mathscr{B}$ 中，然后在模型 $\mathscr{C}$ 中，从几何上作出双曲平面的两条直线 Δ, Δ' 之间的公垂线 Θ.

19.8.10 证明 19.6.9 和 19.7.1 中的公式.

19.8.11 在双曲平面 $\mathscr{B}$ 上给定一条直线 Δ，试讨论 $\{m \in \mathscr{B}: d(m, \Delta) = h\}$ $(h \in \mathbf{R}_+)$；证明它们都是圆锥曲线的并集，在 h 取遍 $\mathbf{R}_+$ 的情形下讨论这个集族（作图）．在 $\mathscr{C}$ 中进行同样的讨论；将两者加以比较.

19.8.12 在双曲平面 $\mathscr{B}$ 上给定一点 $m \in \mathscr{B}$，证明 $\{z \in \mathscr{B}; d(z,$

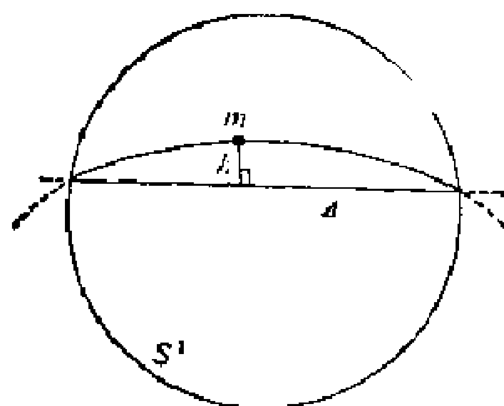
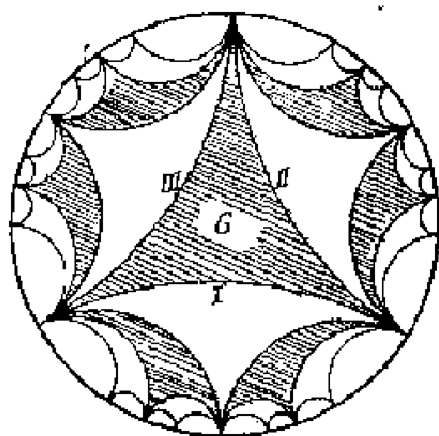


图 19.8.11.



F. Klein,《高等几何教程》, Springer 出版社.

图 19.8.13.

$m) = r\}$ 都是 $\mathbf{R}^2$ 的椭圆，并在 r 取遍 $\mathbf{R}_+$ 的情形下讨论这个集族(作图)。

19.8.13 解释图 19.8.13。

19.8.14 具体算出 19.6.1 中的 E。

19.8.15 证明：S^{n-1} 的内切球面 Σ (即极限球面，19.6.8.3 中极限圆在 $n \geqslant 3$ 时的推广)上由 $\mathscr{C}$ 诱导的度量，使 $\Sigma \cap \mathscr{C}$ 成为等距于 $\mathbf{R}^{n-1}$ 的度量空间。因而，如果 $\mathscr{C}$ 上的居民都集中在 Σ 上，他们就无从知晓自己是生活在双曲空间中的。反过来，如果他们分布在整个 $\mathscr{C}$ 上，他们又是如何知道（即使是局部地）自己不是生活在欧氏空间的？

19.8.16 证明 n 维双曲空间中任意 $n+2$ 个点 x_i $(i=1, \cdots, n+2)$ 必满足

$$\det(\operatorname{ch}[d(x_i, x_j)]) = 0.$$

19.8.17 在 $\mathscr{B}$ 上定义新的距离 $\bar{d}$ 如下：

$$\bar{d}(x, y) = kd(x, y) \quad (k \in \mathbf{R}_+^*);$$

证明 $k \neq 1$ 时，$(\mathscr{B}, \bar{d})$ 不与 $(\mathscr{B}, d)$ 等距。试在 $(\mathscr{B}, \bar{d})$ 中定义角度；说明三角形公式会有什么改变。再考察 k 趋于无穷时由这些公式可得出什么结果。

19.8.18 在双曲平面 $\mathscr{B}$ 上给定极坐标 $(\rho(t), \theta(t))$ 下的一条 C^1

类曲线；证明它在 $\mathscr{B}$ 中从 $t=a$ 到 $t=b$ 的长度为

$$\int_a^b \frac{\sqrt{\rho'^2+\rho^2(1-\rho^2)\theta'^2}}{1-\rho^2}\,dt.$$

19.8.19 在椭圆空间中讨论 9.8.1 到 9.8.5。

19.8.20 整数 n 大于或等于 3，在双曲平面上讨论内角均为 $2\pi/n$ 的正 n 边形。对于不同的 n，讨论这样的多边形的存在性和唯一性。

19.8.21 **一个人口密度定理**。证明椭圆平面上任意九点的集合至少包含一个三角形，其周长小于或等于 π（参见 [BL]，第 262 页）。

19.8.22 **$P^n(\mathbf{C})$ 上的 Fubini-Study 度量**。将 $P^n(\mathbf{C})$ 看作 $S^{2n+1}\subset\mathbf{C}^{n+1}=\mathbf{R}^{2n+2}$ 在由 4.1.1 的定义所诱导的等价关系下的商空间，并将规范射影记为

$$\pi: S^{2n+1}\to P^n(\mathbf{C}).$$

对 $m,n\in P^n(\mathbf{C})$，定义实数 $d(m,n)=\bar{d}(\pi^{-1}(m),\pi^{-1}(n))$，其中 $\bar{d}$ 是 S^{2n+1} 的内蕴度量。证明 d 使 $P^n(\mathbf{C})$ 成为度量空间。在其中讨论最短道路，并说明它们是否唯一。

将上述问题推广到 $P^n(\mathbf{H})$ 上。

19.8.23 图 19.6.12.3 表示什么？

19.8.24 **椭圆等距点集**。任一使所有的距离 $d(m_i,m_j)$ $(i<j)$ 彼此相等的点集 $\{m_i\}_{i=1,\cdots,n}$，称为度量空间的等距点集。证明椭圆平面 P 容有边长可取 0 与 $\pi/2$ 之间一切数值的等距三点组；按 $\mathrm{Is}(P)$ 的作用将它们进行分类。证明 P 容有边长可取 $\mathrm{Arc\,cos}\,1/\sqrt{3}$ 或 $\mathrm{Arc\,cos}\,1/\sqrt{5}$ 的等距四点组；按 $\mathrm{Is}(P)$ 的作用对它们进行讨论。证明在不计等距差别的条件下，P 容有边长为 $\mathrm{Arc\,cos}\,1/\sqrt{5}$ 的一个等距五点组和一个等距六点组（参见 [BL]，第 211—214 页）。

19.8.25 证明对双曲空间的任何三角形，总有不等式

$$b^2+c^2-2bc\cos\alpha\leqslant a^2\leqslant b^2+c^2+2bc\cos(\beta+\gamma).$$

对球面三角形讨论这一问题。

19.8.26 考虑 3 维双曲空间 $\mathscr{C}$，在其中固定一点 p. 对 $\mathbf{R}^3$ 的任一正多面体 P 和任一 $t>0$，构造 $\Pi(P,t)$ 如下：若 a 是 P 的中心，(b_i) 是顶点，则首先在 $\mathscr{C}$ 中作过 p 的射线 (D_i)，使它们两两之间的夹角分别与射影 $\overrightarrow{ab_i}$ 之间的夹角对应相等. 再在每条射线 $\overrightarrow{ab_i}$ 上取点 $q_i(t)$ 使其到 p 的距离等于 t.

证明：如果 b_i 都属于 P 的同一个面，则对应的 $q_i(t)$ 属于 $\mathscr{C}$ 中同一平面（2 维子空间），且该平面是确定的. 这样的平面称为 $\Pi(P,t)$ 的面.

证明：当 t 趋于无限时，$\Pi(P,t)$ 的相邻的面所成的二面角有一极限，而且该极限值是 π 的有理数倍数.

找出这样的 P 和 t，使从"样模" $\Pi(P,t)$ 出发可得到 $\mathscr{C}$ 的铺嵌.

第20章 球面空间

在18.10和19.2中，我们已经遇到过群 $G(n)$，也就是 Möb(n)，它作用在 $\mathbf{R}^n$ 的球面 S^n 和单位开球 $B(0,1)=\mathscr{B}$ 上. 在前一种情形，涉及在二次型 $q=-\sum_{i=1}^{n}x_i^2+x_{n+1}^2$ 的迷向锥面上的作用；在后一种情形，则是在这样的直线上的作用——q 在其上的限制是正定的。然而，q 在其上的限制为负定的直线的集合又是怎样的呢？

本章的目的是说明这一集合自然地等同于一个仿射欧氏空间中球面的集合. 由射影的技巧出发，可以得到一个关于这些球面的集合的有趣的定理，尤其是这样就补足了从第10章以来所应有的统一定理之缺. 在其上 $q<0$ 的直线的集合要比在其上 $q>0$ 的直线集合来得复杂，这正表明了球面几何的困难所在。

20.1 广义的球面空间

20.1.1 设已给定仿射欧氏空间 E，我们要研究 E 中所有球面的集合；一个几何上的想法是利用从一个球面(除去北极)到 E 上的球极射影 $f:S\to E$。图20.1.1表明，若将 E 的球面 σ 与外切于 S、与球面相切于 $f^{-1}(\sigma)$ 的锥面的顶点 w 相对应，则可将 E 的球面与球极射影在其中进行的空间 $\hat{E}$ 中的点对应起来. 实际上确可这样地建立起一套理论；但它有两个缺点，一是 S 和 f 的选取并没有规范地与 E 相联系，二是必须用到 $\hat{E}$ 的无穷远点并须将所考察的对象作适当的嵌入。而且这种观点跟18.10.2很相近.

20.1.2 下面将从代数上进行讨论，从而避免上述所有缺点，至少能很好地确定所考察的对象；我们的想法是把球面写作仿射二次

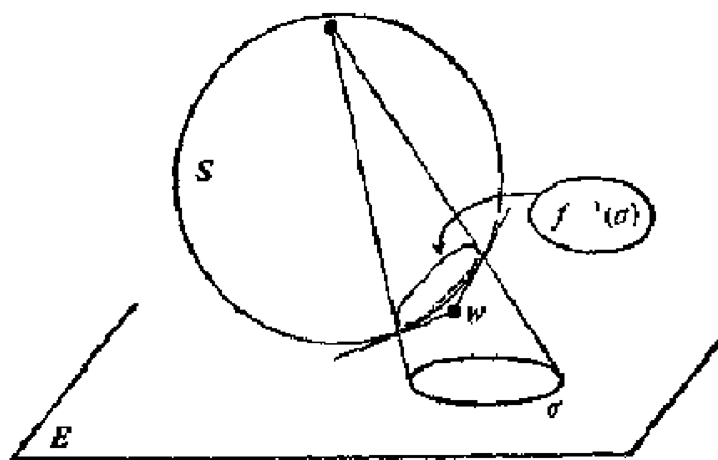


图 20.1.1

曲面，并在E上仿射二次型的射影空间中进行考察．整个想法之所以可行，是因为有这样一个事实：在所考虑的空间中存在一个规范二次型（对应于 20.1.1 的结构中作为象集的球面S）．不过，我们的结构可能因此一开始显得不很自然；但愿读者在以后会对上述结构以及最终得出的结果感到满意．

20.1.3 记号．对于本章中所考察的n维欧氏仿射空间E，$Q(E)$表示E上仿射二次型的向量空间；对$q\in Q(E)$，其相应的符号为$\vec{q}\in Q(\vec{E})$．若E在a处向量化，则q可写为$q=q_2+q_1+q_0$，$q_0\in\mathbf{R}$，$q_1\in E_a^*$，q_2就是$\vec{q}$（参见 3.3）．要注意，别将下面的内容跟在第 15 章所说的内容混为一谈；在第 15 章中，仿射空间X是通过无穷远点的超平面∞_X而完备化的，现在E是通过无穷远点∞本身就完备化的．

10 7.6 中的讨论表明，为了得到球面，引进下述的$Q(E)$的向量子空间是很自然的：

20.1.4 $\check{S}(E)=\{q\in Q(E):\vec{q}=k\|\cdot\|^2,\ k\in\mathbf{R}\}$.

我们看到，这是$Q(E)$的一个$n+2$维子空间．从我们关于仿射或射影二次曲面已经了解的内容出发，可以引进射影空间

20.1.5 $p:\check{S}(E)\setminus 0\to P(\check{S}(E))=S(E)$;

称$S(E)$为E的广义球面空间；这是一个$n+1$维实射影空间，

PQ(E) 的射影子空间（参见 14.1）.

20.1.6 象集. $\lambda\in S(E)$ 的象集是什么？ 如同在 10.7.6 中一样，我们在 $E_\circ$ 中写出 λ 的一个方程 q:

20.1.7 $q=k\|\cdot\|^2+(\alpha\,|\,.)+h$, 其中 $\alpha\in\vec{E}$, $h\in\mathbf{R}$;

如果 $k=0$, $\alpha\neq 0$, 象集是 E 的一个仿射超平面，如果 $k=0$, $\alpha=0$, 由于 $h\neq 0$, 象集为 $\varnothing$. 如果 $k\neq 0$, 在 10.7.6 中已经看到象集是一个球面、一个点或 $\varnothing$. 但由 10.7.6 和上述讨论可知，当 $\mathrm{im}(\lambda)\neq\varnothing$ 时，λ 是由其象集完全确定的. 由此可知，若将 E 的仿射超平面全体记作 Θ, 将 E 中半径 >0 的球面全体记作 Σ, 则有单射

20.1.8 $i:\Sigma\cup E\cup\Theta\to S(E)$,

其中，若将 E 的一点看作以该点为球心的一个"半径为 0 的球面"，则可得出在 E 上的单射性. $i(\Sigma\cup E\cup\Theta)$ 在 $S(E)$ 中的补集由两部分组成： 与方程 $q=1$ 相伴的那一点，以及与 $q=k\|\cdot\|^2+(\alpha|\cdot)+h$, 其中 $\|\alpha\|^2-4kh<0$, 相伴的那些点，它们可被看作非零的"纯虚数半径的球面". 将第一个点记作 $\infty\in S(E)$, 称作 E 的无穷远点. 以后往往通过 i 把 Σ, E 和 $S(E)$ 的子集等同起来，并令:

20.1.9 $\hat{E}=E\cup\infty\subset S(E)$, $\mathscr{S}(E)=\Sigma\cup\hat{E}\cup\Theta\subset S(E)$.

在 19.1.3 中提到过的一些问题，是应该加以注意的. 至于何以要提出这些问题，下文已足以说明; 20.1.1 也对此作了解释.

20.2 $\check{S}(E)$ 的基本二次型

20.2.1 引理. 对于 $E_\circ$ 中的 20.1.7 式而言，量

$$\rho(q)=\frac{\|\alpha\|^2-4kh}{4}$$

与 α 无关而仅与 $q\in\check{S}(E)$ 有关. 它是 $\check{S}(E)$ 上的二次型，符号数为 $(n+1,1)$, 称作 $S(E)$ 的基本二次型.

这一结果是可以预料到的，因为 10.7.6 表明 $\rho(q)$ 极象球面

$q^{-1}(0)$ 的半径的平方。这一点可通过一个平移的计算得到验证(参见 2.1.8)。符号数可由定义看出：$\|\alpha\|^2$ 有 n 个正项，$4kh=(k+h)^2-(k-h)^2$ 有一个正项和一个负项(参见 13.4.7)。

ρ 的配极型记作 $R(.,.)$；从而有

20.2.2 $R(k\|.\|^2+(\alpha|.)+h,\ k'\|.\|^2+(\alpha'|.)+h')$

$$=\frac{1}{4}[(\alpha|\alpha')-2(k'h+kh')].$$

例如，若 q, q' 的象分别是以 a, a' 为球心、以 r, r' 为半径的球面，则对两个球心之间的距离来说有：

20.2.3 $$d^2(a,a')=r^2+r'^2-\frac{2}{kk'}R(q,q').$$

20.2.4 $S(E)$ 的基本二次曲面就是以 ρ 为方程的二次曲面，我们不妨仍记之为 ρ；它是 $S(E)$ 的一个射影二次曲面。关于这个二次曲面的配极或对偶记为⊥(参见 14.5)。我们知道(参见 14.3.3 或 18.10)，ρ 的象集同胚于球面 S^n；但前面(参见 10.7.6)已证明过 $\mathrm{im}(\rho)=\hat{E}$。这正是说嵌入 $i:E\to S(E)$ 是到象集 $i(E)$ 上的同胚，而且 $\hat{E}$ 可看作 E 关于无穷远点(在这儿即∞)的 Alexandroff 紧化空间。这是把 10.8.4.2 中讲过的内容形式化，在 20.6.3 中还将就此给出结论。

20.2.5 现在，由 10.7.6 可知，在 $\check{S}(E)$ 中使 $\rho(q)<0$ 的 q 对应的 $S(E)$ 中的点是半径为纯虚数的球面，而在 $\rho(q)>0$ 的情形则是 $\Sigma\cup\Theta$ 的点，即实球面和超平面。若将 ρ 换成 $-\rho$，则得到符号数为 $(1,n+1)$ 的一个二次型，且由 19.2 可知纯虚数半径的球面构成一个($n+1$ 维的)双曲空间中的点；而这正是 $S(E)$ 中我们不感兴趣的那一部分。$\hat{E}$ 的部分则有球面 S^n 的几何，其上有 Möb(n)(参见 19.2.2 或 18.10)；因而可以讨论 E 的共形群(或循环群)，即下面要在 20.6 中讨论的 Conf($\hat{E}$)。说到

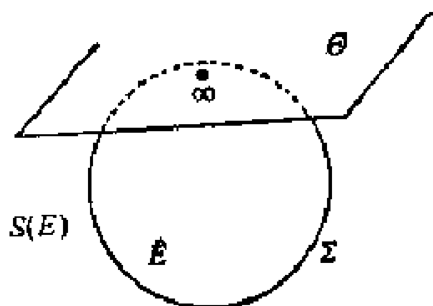


图 20.2.7

底，我们最感兴趣的是 $\mathscr{S}(E)$ 的几何.

20.2.6 这种几何并不简单，这一点由 10.8.4.2 已可见端倪，原因有二：首先因为 $\mathscr{S}(E)$ 的拓扑是除去一点的实射影空间的拓扑，这一空间可收缩成低一维的实射影空间，从而不是单通连的（除去一点的 $P^2(\mathbf{R})$ 已经同胚于 Möbius 带，参见 4.3.9.1）。其次因为，如果二次型 ρ 在 $\mathscr{S}(E)$ 上是恒正的，那么在连接 $\mathscr{S}(E)$ 的两点的 $S(E)$ 中直线上，它可能既取正号也取负号，也可能保证恒正，须视具体情况而定：见 20.4.2.

20.2.7 由 20.2.2 和 14.5.2.1 可知，$\Theta\cup\infty$ 是正好在 ∞ 与 $\hat{E}$ 相切的超平面.

20.3 正 交 性

根据 20.2.2, 20.2.3, 10.7.10.2，可直接验证：

20.3.1 引理. 对 $s, s'\in\mathscr{S}(E)$，关于基本二次曲面 ρ 的正交性 $s\perp s'$ 等价于：

——若 $s, s'\in\Sigma$：s, s' 在 10.7.10.2 的意义下正交；

——若 $s\in\Sigma$，$s'\in\Theta$：s' 是 s 的直径面；

——若 $s, s'\in\Theta$：s, s' 是在欧氏空间意义下的相互正交超平面；

——若 $s\in\Sigma\cup\Theta$，$s'\in E$：s' 是 s 的一点；

——若 $s\in\Sigma\cup\Theta$，$s'=\infty$：$s\in\Theta$.

因此我们看到，$S(E)$ 中的正交性可以用欧氏空间中的正交性来表达，但稍有些例外；为了弥补这一点，我们看到，只须对 $s\in S(E)$ 定义它在 $\hat{E}$ 中的象 $\overline{\mathrm{im}(s)}$ 如下即可：

20.3.2
$$\begin{cases}\overline{\mathrm{im}(s)}=\mathrm{im}(s), & s\in\Sigma \text{ 时};\\ \overline{\mathrm{im}(s)}=\mathrm{im}(s)\cup\infty, & s\in\Theta \text{ 时};\\ \overline{\mathrm{im}(\infty)}=\infty; & \\ \overline{\mathrm{im}(s)}=s, & s\in E \text{ 时};\\ \overline{\mathrm{im}(s)}=\varnothing, & \mathrm{im}(s)=\varnothing \text{ 且 } s\neq\infty \text{ 时}.\end{cases}$$

据此就可由 20.3.1 将 $S(E)$ 中 $\mathrm{im}(s)$ 的点解释如下：

20.3.3 引理. 对 $s\in S(E)$，$\overline{\mathrm{im}(s)}$ 中的点就是 $\hat{E}\cap s^{\perp}$ 的点，或是以 s 为顶点、外切于 $\hat{E}$ 的锥面与 $\hat{E}$ 的接触点.

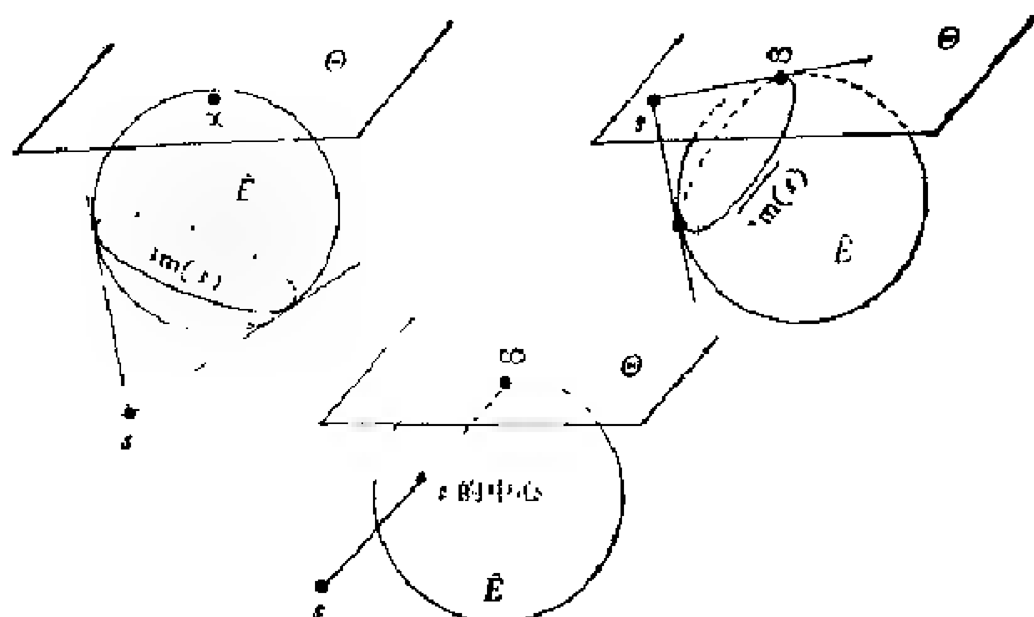


图 20.3.3

20.3.4 例. s 的中心是直线 $\langle s,\infty\rangle$ 与 $\hat{E}$ 的交点中除却∞的那个点.

事实上，s 的中心 ω 的特征是所有过 ω 的超平面都(在欧氏空间意义下)正交于 s；因此，由上述讨论可知这些超平面的全体就是

$$\omega^{\perp}\cap\Theta=\omega^{\perp}\cap\infty^{\perp}=(\omega\infty)^{\perp}\ (\text{参见 }14.5.2.3).$$

$s\perp(\omega\infty)^{\perp}$ 就是 $s\in\omega\infty$.

20.3.5 上述讨论说明：E 的超平面是以∞为中心的球面；至于∞本身，它既是一个特殊的超平面 ($\infty\in\Theta$)，又是一个半径为 0 的特殊球面 ($\infty\in\hat{E}$)，处处都是它的中心(参见 Pascal，《思想录》，第 72 节).

20.4 两个球面的相交与夹角

20.4.1 现在设 $s,s'\in\Sigma\cup\Theta$，其方程为 q,q'；那么 $\dfrac{R(q,q')}{\sqrt{\rho(q)\rho(q')}}$

等于什么? 这儿既不能用 19.2.5，也不能用 8.6.3；实际上问题取决于射影直线 $ss'=\langle s, s'\rangle$，视其是否与 $\hat{E}$ 相交而定。根据二阶方程的古典理论，可得下述命题：

20.4.2 命题. 对于方程为 q, q' 的 $s, s'\in\Sigma\cup\Theta$，以下命题是等价的：

——射影直线 ss' 与 $\hat{E}$ 至多交于一点；

—— $\dfrac{|R(q, q')|}{\sqrt{\rho(q)\rho(q')}}\leqslant 1$；

—— ρ 在 ss' 上的限制是正的或是零；

——$\overline{\mathrm{im}(s)}\cap\overline{\mathrm{im}(s')}\neq\varnothing$。

这时我们说 s, s' 是相交的，如下定义的 $[0, \pi/2]$ 间的实数 $[s, s']$ 称为 s 与 s' 的夹角，它只与 s, s' 有关而与 q, q' 无关：

$$\operatorname{Arc}\cos([s, s'])=\frac{|R(q, q')|}{\sqrt{\rho(q)\rho(q')}}.$$

20.4.3 下述事实证明了上式的合理性：若 $m\in\mathrm{im}(s)\cap\mathrm{im}(s')$，则超切平面 T_ms，T_ms'（当 s 或 s'，或两者都在 Θ 中时，则为平面 $\mathrm{im}(s)$ 和 $\mathrm{im}(s')$ 本身）之间夹角为 $[s, s']$；这一事实，当 $s, s'\in\Sigma$ 时可由 20.2.3 得出，其中一个或两个为超平面的情形就更容易了。

若 $[s, s']=0$，则或者 s, s' 在 $m\in\mathrm{im}(s)\cap\mathrm{im}(s')$ 处相切，或者在

$$\mathrm{im}(s)\cap\mathrm{im}(s')=\varnothing(\text{即 }\overline{\mathrm{im}(s)}\cap\overline{\mathrm{im}(s')}=\infty)$$

的情形下 s, s' 是两个平行超平面。

若 $[s, s']=\pi/2$，则得出 20.3。

对 $[s, s']\in]0, \pi/2[$ 的情形，不能直接由 10.7.7 得出夹角，但在必要时只须通过 $\pi-\cdot$ 即可得出落在 $[0, \pi/2]$ 内的夹角；这是推衍到射影空间 $S(E)$ 并将超平面归入等价类所得的结果．而用 $[0, \pi/2]$ 内的这个角$[\ ,\ ]$，我们可以很容易地解决许多初等几何中的难题（例如参见10.13.20），下面就是一个例子。几何问题现在又归结成了线性代数问题。

20.4.4 两个已知球面的等角球面。设 $s, s' \in \Sigma \cup \Theta$；则 $\{t \in \Sigma \cup \Theta : [t, s] = [t, s']\}$ 可划分为两个集合 F, F'。存在 $u, u' \in S(E)$，使 $t \in F$（或 $t \in F'$）蕴含 $t \perp u$（或 $t \in u'$）。这些广义球面称为 s 和 s' 的等分球面。

取 s, s' 的方程使 $\rho(q) = \rho(q') = 1$，并由一个使 $\rho(q'') = 1$ 的方程 q'' 求出 t。由 $[t, s] = [t, s']$ 的条件就可得出 $|R(q, q'')| = |R(q', q'')|$，即 $R(q + q', q'') = 0$ 或 $R(q - q', q'') = 0$；球面 u, u' 就是以 $q + q'$，$q - q'$ 为方程的球面。

更一般地，我们研究集合 $\{t : [t, s_i] = \alpha_i \ \forall i = 1, \cdots, k\}$，其中 $\alpha_i \in [0, \pi/2]$，$s_i \in \Sigma \cup \Theta$；与 10.7.8 相比较。

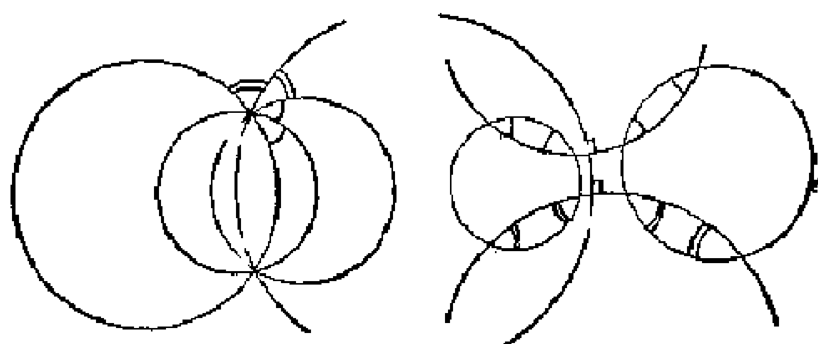


图 20.4.4

20.5 k 维球面，球面束

在 20.4.1 中我们曾遇到过 $S(E)$ 的射影直线，那是射影二次曲面束的特殊情形（参见 14.2）；若 s, s' 相交，一般来说，它们是沿一个 $n-2$ 维球面相交的（参见 10.7.5），该球面只与射影直线 ss' 有关。更一般地说，我们因此要引进：

20.5.1 定义。 $S(E)$ 的 k 维射影子空间称为 E 的 k 维球面束。E 的 $(n-k-1)$ 维球面束称为 E 的（广义）k 维球面。

因此，在 $n=2$，$k=1$ 时得到的是点对（或 $\varnothing$），在 $n=3$，$k=1$ 时得到的是我们所在的欧几里得空间的（广义）普通圆。

20.4.2 成为：

20.5.2 引理. 若 K 是一个(任意 k 维的)球面束；则 $\bigcap_{s\in K}\overline{\mathrm{im}(s)}\neq\varnothing$ 的充要条件是 ρ 在 K 上的限制是正的或为零.

根据 20 3 3，有 $\bigcap_{s\in K}\overline{\mathrm{im}(s)}=\hat{E}\cap K^{\perp}$；但由 13.4.7，$\rho$ 不可能同时在 K 和 $K^{\perp}$ 上是正的或为零。

20.5.3 定义. k 维球面 K 与 k' 维球面 K' 的夹角定义为

$$[K,K']=\inf\{[u,u']:u\in K,\ u'\in K'\}.$$

因而这一夹角仅在某些情形下是有意义的. $k=1$，$k'=2$，$n=3$ 时，由 8 6.7 和 20.4.3 可知，它就是我们的欧氏空间中的一个圆和一个球面的通常意义下的夹角.

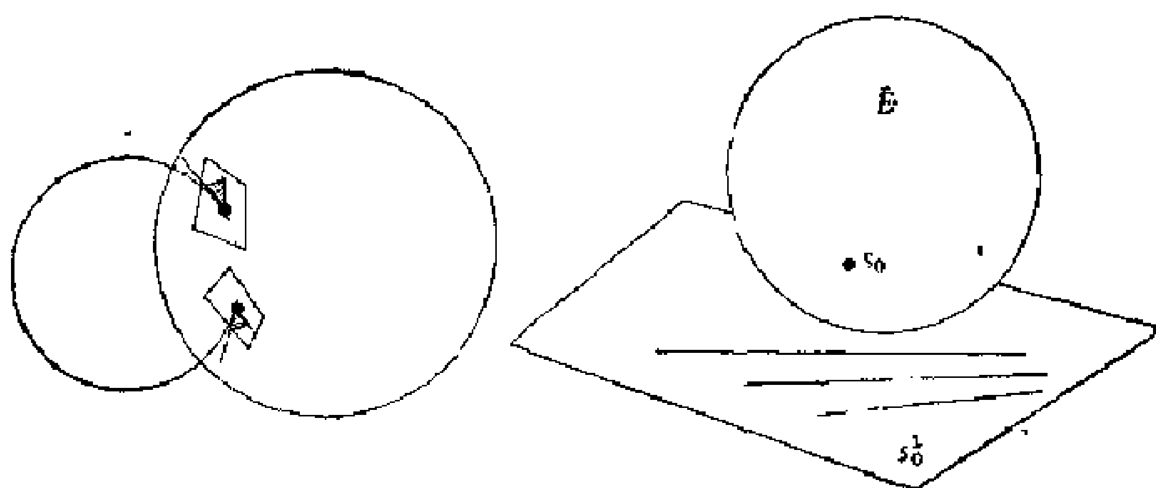


图 20.5.3

20.5.4 应用. 由上述讨论，可以得到 18.9 的一个很好的解释. 事实上，设 s_0 是给定的纯虚球面，则 $s_0^{\perp}$ 是 $S(E)$ 的超平面，ρ 在其上正定；若 $n=3$，则 $s_0^{\perp}$ 是一个可应用 19 1 4 的椭圆空间；由此可得 10 12.3 的各种性质. 由于 $PO(\rho)$（参见 13.7.1）在纯虚球面 s_0 上可迁，我们看到，3 维欧氏空间中每对构成 α 角绕平行环面的圆，必可通过 Conf$(\hat{E})$ 的一个元素互化. 请读者自己把 18 8 4 的所有结论详细地搬过来.

20.5.5 两个圆的交织. 仍在 $n=3$ 的情形，我们可以从射影的观点来看两个圆 K,K' 的交织：它们交织的充要条件是它们生成

的射影超平面 $\langle K\cup K'\rangle$ 不与 $\hat{E}$ 相交。

20.5.6 球面束的分类. 问题在于考察 $S(E)$ 中一条直线关于决定 E 中几何学的三元素 E，∞ 和 Θ 的可能位置. 可以看到，有六种可能情况:

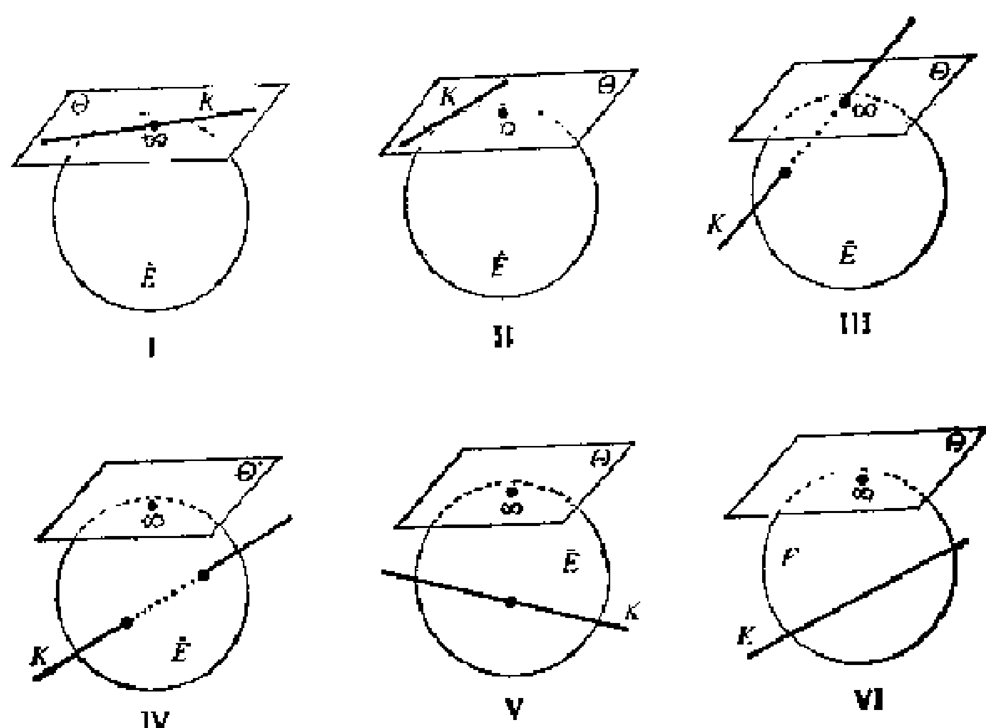


图 20.5.6

它们给出下列球面束:

类　型	位　置	性　质	E 中的 $(n-2)$ 维球面
I	$K\subset\Theta$ 且 $K\ni\infty$	平行超平面	$\varnothing$
II	$K\subset\Theta$ 且 $K\not\ni\infty$	相交超平面	$(n-2)$ 维射影子空间
III	$K\not\subset\Theta$ 且 $K\ni\infty$	同心球面	[illegible]
IV	$K\not\ni\infty$ 且 $K\cap E=2$ 点	极限点处球面束	$\varnothing$
V	$K\not\ni\infty$ 且 $K\cap E=1$ 点	相切球面	1 点
VI	$K\not\ni\infty$ 且 $K\cap E=\varnothing$	相交球面	$(n-2)$ 维球面

在平面的情形，由 IV，V，VI 即得 10.10.1 的三个圆：由 20.3.1 和 10.10，我们看到，球面束 K 的正交圆束正好是 $K^{\perp}$. 当 $n=2$ 时，对这些类型有 $\mathrm{I}^{\perp}=\mathrm{I}^{\perp}$，$\mathrm{II}^{\perp}=\mathrm{III}$，$\mathrm{IV}^{\perp}=\mathrm{VI}$，$\mathrm{V}^{\perp}=\mathrm{V}$.

20.5.7 注. 14.3.7 表明，在 3 维欧氏空间的圆的集合与复射影二次曲面 $C(4)$ 之间存在一个自然同构.

20.6 循环群 Conf ($\hat{E}$)

20.6.1 我们在 20.2.5 中已经看到，引进二次型 ρ 的射影群 PO(ρ) 是很自然的. 根据 13.7.1，这个群可迁地作用在 $\Sigma\cup\Theta$ 上，而且作用在 $\hat{E}$ 上，且该作用与 Möb(n) 的作用同构. 将 PO(ρ) 在 $\hat{E}$ 上的这一作用记为 Conf ($\hat{E}$)，称为 E 的循环群，以区别于等同于 Conf (E) 的相似群 Sim(E)，参见 9.5.4.6；要不然也可称之为 $\hat{E}$

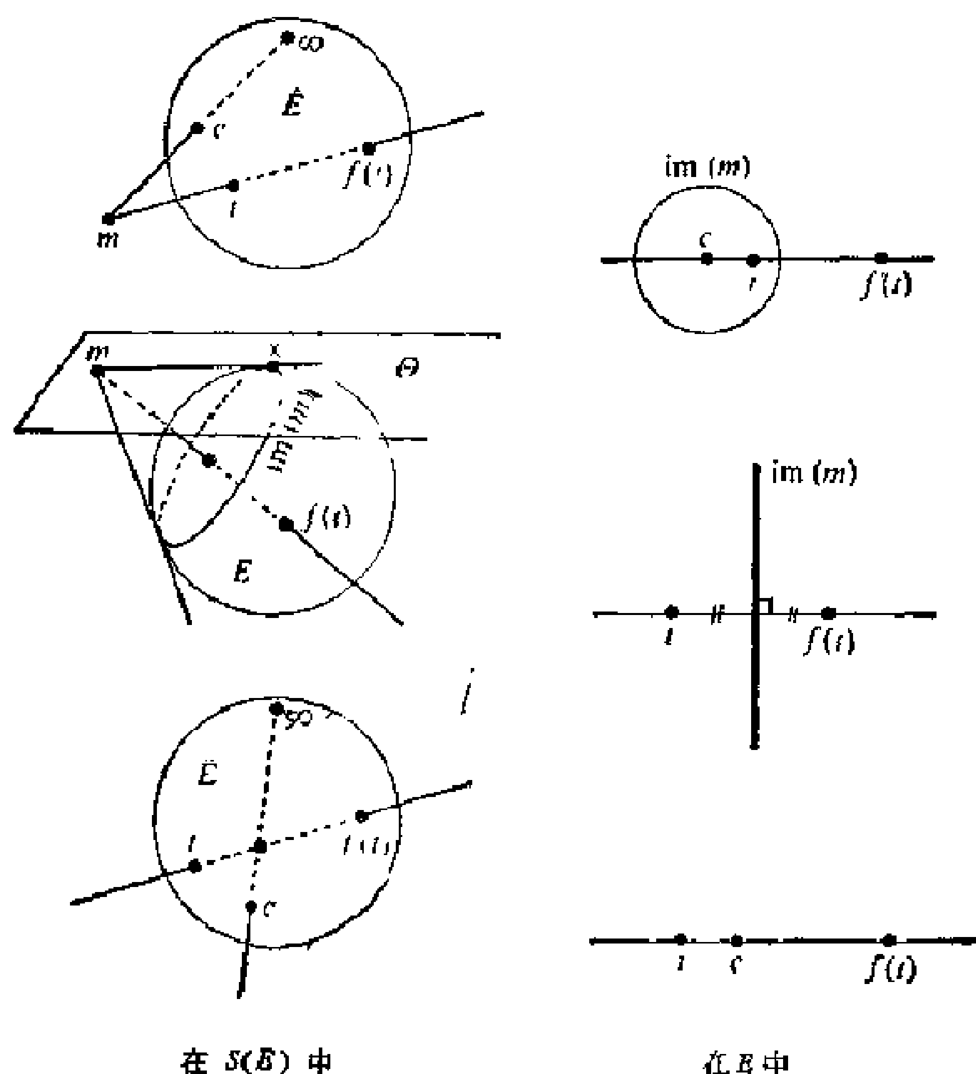


图 20.6.2

的共形群，见 20.6.4。

20.6.2 为了知道 $\mathrm{Conf}(\hat{E})$ 的元素的情况，我们利用 14.7.4，由那里可知，$\mathrm{Conf}(\hat{E})$ 是由图 14.7.4 类型的变换所生成的；现在点 m 属于 $S(E)\setminus\hat{E}$，而 $f: t\longmapsto f(t)$ 的定义满足 t，$f(t)$，m 共线的条件。在 E 中，若 $t, f(t)\in E$ 而 $\mathrm{im}(m)\neq\varnothing$，这就是说 $\mathrm{im}(m)$ 和两个点球面这三个球面构成一个球面束，也就是说 $f(t)$ 是 t 在以 $\mathrm{im}(m)$ 的中心 C 为极点、以 $\mathrm{im}(m)$ 为反演球面的反演的象。由 20.3.4，到 $\hat{E}$ 的扩张由 $f(c)=\infty$ 和 $f(\infty)=c$ 给出。若 $\mathrm{im}(m)$ 是超平面，则我们得到关于该超平面的对称，并由 $f(\infty)=\infty$ 延拓。最后，如果 $\mathrm{im}(s)=\varnothing$，那么得到的是中心反演，设 $q=\|\cdot\|^2+(\alpha|\cdot)+h$ 是 s 的一个法方程，则中心为 c 而幂等于 $\rho(q)$。据此，由 14.7.4 和 13.7.12 可推得：

20.6.3 定理. $\mathrm{Conf}(\hat{E})$ 的每一元素是至多 $n+2$ 个下列类型的变换的乘积：或者 f 是 E 的以 c 为极点的反演，且由 $f(c)=\infty$ 和 $f(\infty)=c$ 延伸到 $\hat{E}$，或者 f 是超平面的欧氏对称，且由 $f(\infty)=\infty$ 延伸到 $\hat{E}$。

20.6.4 注. "循环群"也叫"圆群"，这名称是这样来的：$\mathrm{Conf}(\hat{E})$ 把球面变换成球面，从而把圆变换成圆；这由 $\hat{E}$ 和 $\mathrm{Conf}(\hat{E})$ 的构造显而易见。根据 18.10.4，这一性质是可作特征的。这样，我们就完成了 10.8.4.2 和 18.10.2.2 中未尽的讨论。

有一种定向球面的几何学，主要归功于 Laguerre；它在 $\check{S}(E)$ 中考虑射线的几何学（以代替构成 $S(E)$ 的直线的几何学）。对此，在 10.11.6 曾有提及，在该节中读者还可了解有关文献。

20.7 多球坐标

20.7.1 浏览过一些较古老的书籍，例如 [KN 2] 第 49 页以后的内容的读者，会在平面上的圆或三维空间中的球面的讨论中见到"四圆坐标"、"五球坐标"的名称。按照前面的讨论，它们无非就是 $S(E)$ 的齐次坐标，且是由 $\check{S}(E)$ 的一组关于基本二次型 ρ

的正交基而得来的；这样的坐标称为多球坐标．它们可用以研究 E 的球面，但也可用以研究 E 中这样的点：它们是 $S(E)$ 中满足 $\rho=0$ 的点．下面是这种坐标的一个应用．

20.7.2 四次圆纹曲面及其圆族． 我们在 10.12 中遇到过一些相当简单的(四阶)曲面，它们是连通的，而且容有四个实的单参数族圆，这种曲面就是旋转环面；这是一类更一般的四阶曲面的特殊情况，这类曲面容有六族圆．设 3 维欧氏空间 E 的一个曲面可写为 $E\cap\operatorname{im}(\mu)$，其中 μ 是射影空间 $S(E)$ 的射影二次曲面，则称此曲面为四次圆纹曲面．本书不准备系统地研究这类曲面，读者可参阅 [DX]，第 405—481 页．我们仅仅考察一个由 μ 定义的四次圆纹曲面，其中的 μ 是和 ρ 可以同时约化的(参见 13.5)；不妨假定(参见 13.4 2 和 20.2.2)它们形如

$$\rho=z_1^2+z_2^2+z_3^2+z_4^2-z_5^2,\quad \mu=\sum_{i=1}^{5}a_iz_i^2.$$

要找圆，就是要在 $S(E)$ 的二次曲面束 $k\rho+h\mu$ 中找 $S(E)$ 的射影平面．该束中退化的二次曲面恰有以下五种：

20.7.3 $a_1\rho-\mu,\ a_2\rho-\mu,\ a_3\rho-\mu,\ a_4\rho-\mu,\ a_5\rho-\mu.$

根据 14.1.7，它们各是以一个超平面上的二次曲面为底的圆锥，例如 $a_5\rho+\mu$，其方程为 $\sum_{i=1}^{4}(a_5+a_i)z_i^2$，是以 $(0,0,0,0,1)$ 为顶、以超平面 $z_5=0$ 上的二次曲面 $\sum_{i=1}^{4}(a_5+a_i)z_i^2$ 为底的圆锥．然而，我们知道 $\sum_{i=1}^{4}(a_5+a_i)z_i^2=0$ 在 a_5+a_i 的符号为两正两负时(参见 14.4)包含两族直线．最后我们就看到，在四次圆纹曲面 $E\cap\operatorname{im}(\mu)$ 上，圆族的数目是 20.7.3 的五个方程中含两正两负项的方程个数的两倍．容易看出，这个数目不可能超过 $2\times3=6$，而且，举例来说对 $2z_1^2+3z_2^2-4z_3^2-3z_4^2-z_5^2$ 它正等于 6．环面属于 Dupin 四次圆纹曲面，对这类曲面来说至少有两个 a_i 相等，因此属退化情形，并从而引出某些圆族相串连的情形．

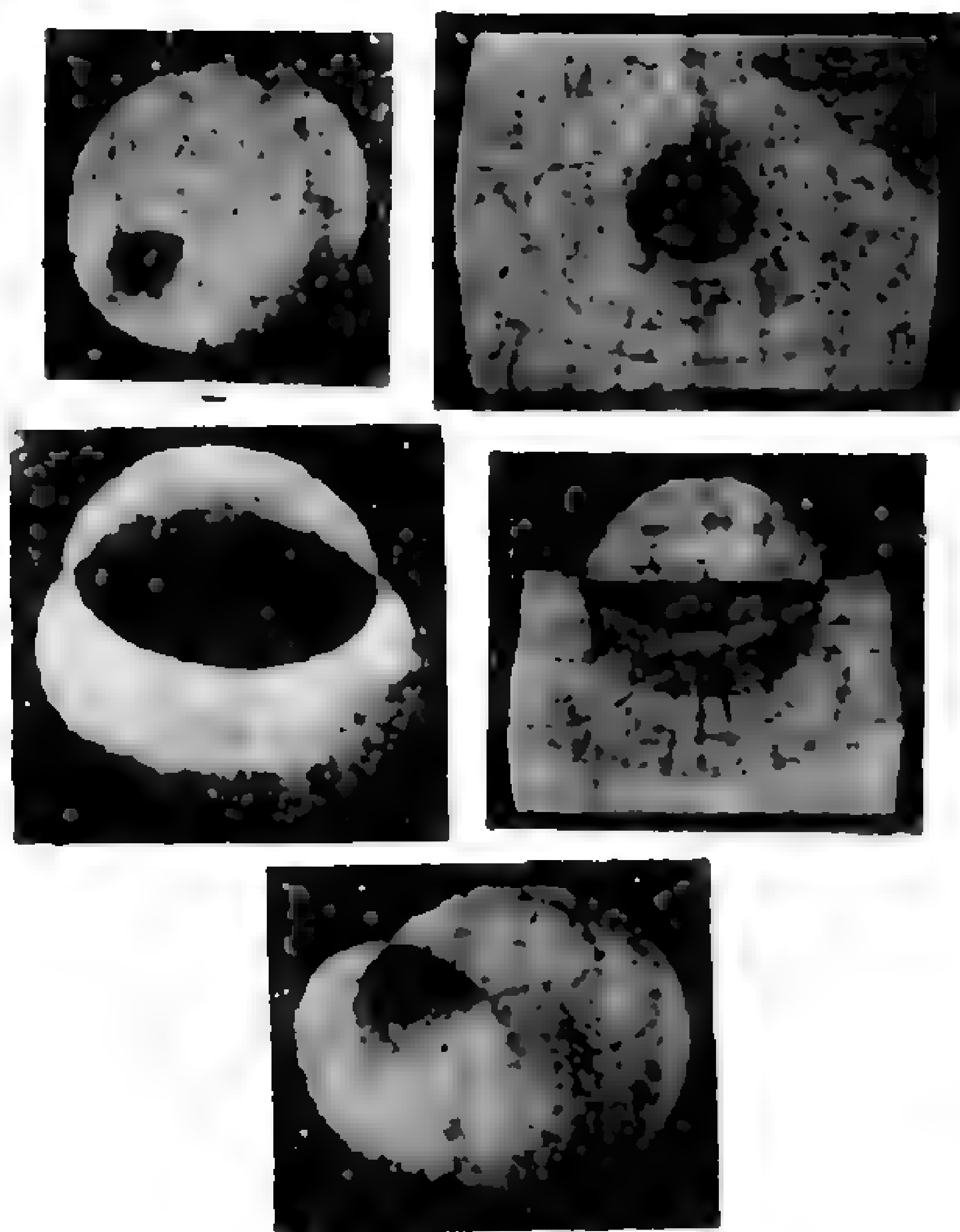


图 20.7.3.1—20.7.3.5.
Hilbert, Cohn Vossen, 直观几何, Chelsea.

20.8 练　　习

20.8.1 从几何上论证 $S(E)$ 中与 $m(\cdot)$ 相似的平面。

20.8.2 说明 20.4.4 中"等分球面"名称的来由。

20.8.3 用本章的语言叙述［HD 2］第 608—667 页的内容。

20.8.4 对［KN 2］第 49—58 页和 100—105 页做同样的工作。

20.8.5 验证环面是 Dupin 四次圆纹曲面。

20.8.6 设 C, D, C', D' 是 E 中四圆，半径分别为 r, s, r', s'；C, D（或 C', D'）的圆心距离记为 d（或 d'）。证明：存在 $f\in \mathrm{Conf}(\hat{E})$ 使 $f(C\cup D)=C'\cup D'$ 的充要条件是

$$\left|\frac{r^2+s^2-d^2}{2rs}\right|=\left|\frac{r'^2+s'^2-d'^2}{2r's'}\right|.$$

将你的证明与［D·C 1］第 222 页的证明相比较。

20.8.7 （**Darboux 定理**）．若一条动直线上三点画出球心共线的三个球面，则该直线上任一点也画出这样的球面，而且，一般而言，其中有一点画出一个平面．找出该动直线上四点与它们所画出的四个球面的球心之间的联系。

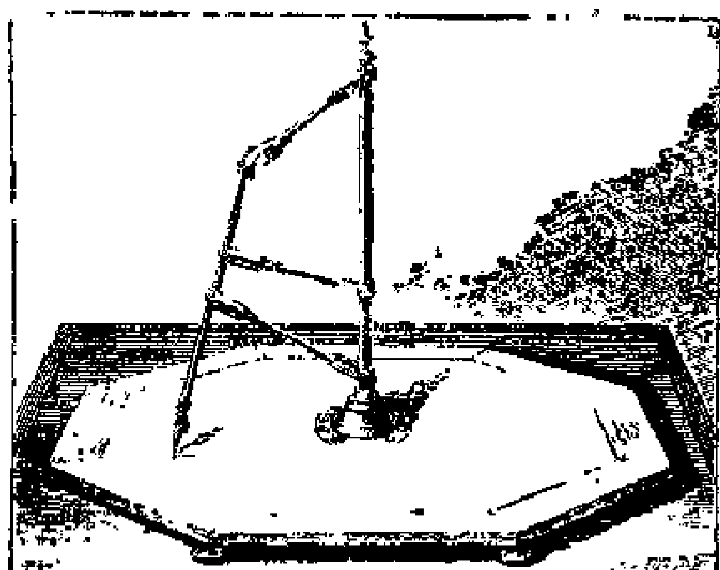


图 20.8.7.

Gabriel Koenigs,《运动学课程》,A. Hermann, 1897.

参考书目

[A-A] ARNOLD (V. I.) et AVEZ (A.). *Problèmes ergodiques de la mécanique classique*, Gauthier-Villars.

[A-B] ANNEQUIN et BOUTIGNY. *Cours de Physique, Optique*, Vuibert.

[A-B-S] ATIYAH (M. F.), BOTT (R.) et SHAPIRO (A.). *Clifford Modules*, Topology, 3, 1964-1965, supplément, p. 3-38..

[AE] *Astronomie*, Encyclopédie de la Pléïade, Gallimard

[AN] ARTIN (Emil) *Geometric Algebra*, Interscience.

[AR] ARNOLD (V.) *Méthodes mathématiques de la mécanique classique*, Mir Moscou.

[AS] ARNAUDIÈS (J.-M.), *Les cinq polyèdres de* $\mathbf{R}^3$ *et leurs groupes*, C.D.U.-S.E.D.E.S., Paris.

[AV] ALEXANDROW (A. D.). *Konvexe Polyeder*, Akademie Verlag, Berlin.

[AW] ALEXANDROW (A.D.). *Die innere Geometrie der konvexe Fläche*, Akademie Verlag, Berlin.

[BA] BIANCHI (L.). *Sulle configurazioni mobili di Möbius nelle transformazioni asintotiche delle curve el delle superficie*, Rend. del Circolo Mat. di Palermo, 25, 1908, p. 291-325.

[BAN] BANCHOFF (Thomas). *Non-rigidity Theorems for Tight Polyhedra*, Archiv der Mathematik, 21, 1970, p. 416-423.

[BA-WH] BANCHOFF (Thomas) et WHITE (James). *The behavior of the total twist and self-linking number of a closed space curve under inversions*, Mathematica Scandinavica 36, 1975, p. 254-262.

[B-B] BECKENBACH (Edwin F.) et BELLMAN (Richard). *Inequalities*, Springer.

[BE] BROUSSE (Pierre). *Mécanique*, Armand Colin.

[BER] BERGER (M.). *Lectures Notes on Geodesics in Riemannian Geometry*, Tata Institute, Bombay.

[BES] BESSE (Arthur). *Manifolds all of whose geodesics are closed*, Ergebnisse der Mathematik, Band 93, Springer.

[B-F] BONNESEN (O.) et FENCHEL (W.). *Theorie der konvexe Körper*, Chelsea.

[B-G] BERGER (Marcel) et GOSTIAUX (Bernard). *Géométrie différentielle*, Armand Colin.

[B-H] BOREL (A.) et HIRZEBRUCH (F.). *Characteristic Classes and Homogeneous Spaces*, American Journal of Math., 80, 1958, p. 458-538.

[B-H-H] BLACK (W. L.), HOWLAND (H. C.) et HOWLAND (B.). *A Theorem about Zigzags between two Circles*, American Math. Monthly, 81, 1974, p. 754-757.

[BI 0] BOURBAKI (Nicolas). *Eléments de mathématiques*, Théorie des Ensembles, Hermann, 1970.

[BI 1] BOURBAKI (Nicolas). *Eléments de mathématiques*, Topologie Générale, chapitres 5 à 10, Hermann, 1974.

[BI 2] BOURBAKI (Nicolas). *Eléments de mathématiques*, livre II, chapitre 9, Hermann.

[BI 3] BOURBAKI (Nicolas). *Eléments de mathématiques*, livre V, chapitres 1, 2, 2e édition, Hermann.

[BI 4] BOURBAKI (Nicolas). *Groupes et algèbre de Lie*, chapitre 4, 5, 6, Hermann.

[BI 5] BOURBAKI (Nicolas). *Eléments de mathématiques*, Algèbre chapitres 1 à 3, Hermann, 1970.

[B-K] BUSEMANN (Herbert) et KELLY (Paul J.). *Projective Geometry and Projective Metrics*, Academic Press.

[BL] BLUMENTHAL (Leonard M.). *Theory and Applications of Distance Geometry*, Chelsea.

[BLA 1] BLASCHKE (Wilhelm) *Kreis und Kugel*, Chelsea.

[BLA 2] BLASCHKE (Wilhem). *Vorlesungen über Differential Geometrie, II : Affine Differential Geometry*, Springer.

[BLA 3] BLASCHKE (Wilhelm). *Vorlesungen über Differential Geometrie, III : Differential Geometrie der Kreise und Kugel*, Springer.

[BL-BO] BLASCHKE (W.) et BOL (G.). *Geometrie der Gewebe*, Springer, 1938.

[B-M] BLUMENTHAL (Leonard M.) et MENGER (Karl). *Studies in Geometry*, W. H. Freeman.

[BN] BOURGIN (D. G.). *Modern Algebraic Topology*, Mac Millan.

[BO 1] BOREL (Armand) *Sur l'homologie et la cohomologie des groupes de Lie compacts connexes*, American Journal of Math., 76, 1954, p. 273-342.

[BO 2] BOREL (Armand). *Sur la cohomologie des espaces fibrés principaux et des espaces homogenes de groupes de Lie compacts*, Annals of Math., 57, 1953, p. 115-207

[BP] BAUDOIN (Paul). *Les ovales de Descartes et le limaçon de Pascal*, Vuibert.

[BR] BAER (R.). *Linear Algebra and Projective Geometry*, Academic Press.

[B-S] BOREVICH (Z. I.) et SHAFAREVICH (I. R.). *Number Theory*, Academic Press.

[B-T] BRUHAT (F.) et TITS (J.). *Groupes réductifs sur un corps local, I. Données radicielles valuées*, Publ. Math. I.H.E.S., n° 41

[BU 1] BUSEMANN (Herbert) *Convex Surfaces*, Interscience.

[BU 2] BUSEMANN (Herbert). *Recent Synthetic Differential Geometry*, Ergebnisse der Mathematik, nº 54, Springer.

[BUR] BURCKHARDT (J. J.). *Die Bewegungsgruppen der Kristallographie*, Birkhaüser.

[BV] BONNEVAL (H.). *Photogrammétrie générale (4 volumes)*, Eyrolles.

[BZ] BENZ (Walter). *Vorlesungen über Geometrie der Algebren*, Springer.

[CA] CAIRNS (Stewart Scott). *Introductory Topology*, Ronald Press.

[CAL] CALLAHAN (Francis P.). *Morley polygons*, American Math. Monthly 84, 1977, p. 325-337.

[C-B] COUDERC (P.) et BALLICIONI (A.). *Premier livre du tétraèdre*, Gauthier-Villars.

[CD] CARATHEODORY (C.). *The most general transformation which transform circles into circles*, Bull. Amer. Math. Soc., 43, 1937, p. 573-579.

[C-D-L] COHEN-TANNOUDJI (C.), DIU (B.) et LALOE (F.). *Mécanique quantique*, vol. 1, Hermann.

[CE 1] CARTAN (Elie). *Sur les propriétés topologiques des quadriques complexes*, Oeuvres complètes, tome I, volume 2, p. 1227-1246.

[CE 2] CARTAN (Elie). *The Theory of Spinors*, Hermann ou The M.I.T. Press, Cambridge, Mass.

[C-G] CHEEGER (Jeff) et GROMOLL (Detlef). *On the Structure of Complete Manifolds of Nonnegative Curvature*, Ann. of Math., 96, 1972, p. 413-443.

[CH 1] CARTAN (Henri). *Calcul différentiel*, Hermann.

[CH 2] CARTAN (Henri). *Théorie élémentaire des fonctions d'une ou plusieurs variables complexes*, Hermann.

[CH-GR] CHERN (S. S.) et GRIFFITHS (P.). *Abel's theorem and webs*, Jahrbericht d. Deutsche Math.-Verein., 80, 1978, p. 13-110.

[CL 1] CONNELLY (Robert). *A counter example to the rigidity conjecture for polyhedra*, Public. Math. I.H.E.S., 47, 1978, p. 333-338.

[CL 2] CONNELLY (Robert). *A flexible sphere*, Math. Intelligencer, 1, 1978, p. 130-131.

[C-M] COXETER (H. S. M.) et MOSER (W. O. J.). *Generators and Relations for Discrete Groups*, 2ᵉ édition, Springer.

[CN] CUENIN (R.). *Cartographie générale (2 volumes)*, Eyrolles.

[CO] CONNELLY (Robert). *An attack on rigidity I, II*. Preprints, Cornell University.

[CR 1] COXETER (H. S. M.). *Introduction to Geometry*, John Wiley.

[CR 2] COXETER (H. S. M.). *Regular Polytopes*, Methuen.

[CR 3] COXETER (H. S. M.). *Non-euclidean Geometry*, The University of Toronto Press.

[CR 4] COXETER (H. S. M.). *Regular Complex Polytopes*, Cambridge University Press.

[CR 5] COXETER (H. S. M.). *The Problem of Apollonius*, American Math. Monthly, 75, 1968, p. 5-15.

[CS] CASSELS (J. W. S.). *An Introduction to the Geometry of Numbers*, Springer.

[CT] CHOQUET (Gustave) *Cours d'Analyse, tome II . Topologie*, Masson.

[CY] CHEVALLEY (Claude). *Theory of Lie Groups*, Princeton University Press.

[CZ] CONZE (Jean Pierre). *Le théorème d'isomorphisme d'Ornstein et la classification des systèmes dynamiques en théorie ergodique*. Séminaire Bourbaki, novembre 1972.

[D-C 1] DELTHEIL (Robert) et CAIRE (Daniel) *Géométrie*, J. B. Baillière.

[D-C 2] DELTHEIL (Robert) et CAIRE (Daniel). *Compléments de géométrie*, J. B. Baillière.

[DE 1] DIEUDONNÉ (Jean). *La géométrie des groupes classiques*, 2e *édition*, Springer.

[DE 2] DIEUDONNÉ (Jean). *Algèbre linéaire et géométrie élémentaire*, 3e *édition*, Hermann.

[DE 3] DIEUDONNÉ (Jean). *Calcul infinitésimal*, Hermann.

[DE 4] DIEUDONNÉ (Jean). *Eléments d'Analyse, tome II*, Gauthier-Villars.

[DE 5] DIEUDONNÉ (Jean), *Eléments d'Analyse, tome III*, Gauthier-Villars.

[DE 6] DIEUDONNÉ (Jean). *Elements d'Analyse, tome IV*, Gauthier-Villars.

[DE 7] DIEUDONNÉ (Jean). *Foundations of Modern Analysis*, Academic Press.

[DE 8] DIEUDONNÉ (Jean). *Cours de Géométrie Algébrique* (*tomes* 1 *et* 2), Presses Universitaires de France.

[D-G-K] DANZER (L.), GRUNBAUM (B.) et KLEE (V.) *Helly's Theorem and its Relatives*, A.M.S. Symposium on Convexity Proc. Symp. Pure Math., volume 7, 1963.

[DI] DEMBOWSKI (P.). *Finite Geometries*, Ergebnisse der Mathematik, nº 44, Springer

[DI-CA] DIEUDONNÉ (Jean) et CARRELL (James B.) *Invariant Theory, Old and New*, Academic Press.

[DN] DANJON (André) *Astronomie générale*, J. et R. Sennac.

[DO] DORRIE (Heinrich) 100 *Great Problems of Elementary Mathematics*, Dover.

[DQ] DUPORCQ (Ernest). *Premiers principes de géométrie moderne*, 3e *édition*, Gauthier-Villars.

[DR] DIXMIER (Jacques). *Cours de mathematiques du premier cycle, deuxième année*, Gauthier-Villars.

[DV] DVORETSKY (Aryeh). *Some results on convex bodies and Banach spaces*, p. 123-160 dans Proceedings of the International Symposium on Linear Spaces, Jerusalem, 1961.

[DX] DARBOUX (Gaston). *Principes de Géométrie Analytique*, Gauthier-Villars

[DY] DOUADY (Adrien). *Le shaddock à six becs*, Bulletin A.P.M.E.P., 281, 1971, p. 699.

[EE] *Encyklopädie der Mathematischen Wissenchaften, Geometrie*, III.2.1, Teubner.

[E-K] EELLS (James) et KUIPER (Nicolas O.). *Manifolds which are like Projective Planes*, Public. Math. I.H.E.S., nº 14, p. 5-46.

[EL] ELLISON (W. J.). *Waring's problem*, American Math. Monthly, 78, 1971.

[EN] EGGLESTON (H. G.). *Convexity*, Cambridge University Press.

[ER] ESCHER (M. C.). *L'œuvre graphique*, Solin, Paris.

[E-S] EELLS (J.) et SAMPSON (J. H.) *Harmonic Mappings of Riemannian Manifolds*, American Journal of Math., 86, 1964, p. 109-160.

[FA] FALCONER (K. J.). *A characterisation of plane curves of constant width*, J. London Math. Soc., 16, 1977, p. 536-538.

[FI] FILLMORE (Jay P.). *Symmetries of surfaces of constant width*, J. of Diff. Geometry, 3, 1969, p. 103-110.

[FL] FRENKEL (Jean). *Géométrie pour l'élève-professeur*, Hermann.

[FN] FULTON (William). *Algebraic Curves*, Benjamin.

[FR] FEDERER (Herbert). *Geometric Measure Theory*, Springer.

[FT 1] FEJES-TOTH (L.) *Lagerungen in der Ebene, auf der Kugel und im Raum*, Springer.

[FT 2] FEJES-TOTH (L.). *Regular Figures*, Pergamon.

[GA] GARDNER (Martin). *Extraordinary nonperiodic tiling that enriches the theory of tiles*, Scientific American, January 1977.

[GE] GONSETH (F.). *Un théorème relatif à deux ellipsoides confocaux*, Bulletin des Sciences Math., 42, 1918, p. 177-180 et 193-194.

[GG] GREENBERG (Marvin J.). *Lectures on Algebraic Topology*, Benjamin.

[G-G-V] GELFAND (I. M.), GRAEV (M. I.) et VILENKIN (N. Ya). *Generalized Functions, volume 5, Integral Geometry and Representation Theory*, Academic Press.

[GIS] GRIFFITHS (Phillip A.). *Variations on a Theorem of Abel*, Inventiones Math., 35, 1976, p. 321-390.

[GI-WE] GIBBONS (J. C.) et WEBB (C.). *Circle preserving maps of spheres*, preprint, Illinois Institute of Technology, Chicago.

[GK] *Grundzüge der Mathematik, Band IV : Praktische Methoden und Anwendungen der Mathematik*, Vandenhoeck and Ruprecht.

[G-K-M] GROMOLL (D.), KLINGENBERG (W.) et MEYER (W.). *Riemannsche Geometrie im Grossen, Lecture Notes in Mathematics*, n° 55, Springer.

[GL] GLUCK (Herman). *Almost All Simply Connected Closed Surfaces are Rigid*, preprint, University of Pennsylvania.

[GM] GRAMAIN (André). *Topologie des surfaces*, Presses Universitaires de France.

[GN] GÉRARDIN (Paul). *Mathématiques Elémentaires Approfondies*, cours polycopié, Université Paris VII, U.E.R. de Mathématiques.

[G-O] GELBAUM (Bernard D.) et OLMSTED (John M. H.). *Counterexamples in Analysis*, Holden-Day.

[GR] GUGGENHEIMER (Heinrich W.). *Plane Geometry and its Groups*, Holden-Day.

[GR-HA] GRIFFITHS (P.) et HARRIS (S.). *On Cayley's Explicit Solution to Poncelet's Porism*, L'Enseignement Mathématique, 24, 1978, p. 31-40.

[GR SH1] GRÜNBAUM (B.) et SHEPHARD (G. C.). *The eighty-one types of isohedral tilings in the plane*, Math. Proc. Cambridge Phil. Soc., 82, 1977, p. 177-196.

[GR SH2] GRÜNBAUM (B.) et SHEPHARD (G. C.) *The 91 types of isogonal tiling in the plane*, Trans. A.M.S., 242, 1978, p. 335-354.

[GS] *Geometric Inequalities* (BOTTEMA *et alia*), Wolters-Noordhoof.

[GT] GUICHARDET (A.) *Calcul intégral*, Armand Colin.

[GX] GODEAUX (Lucien). *Les géométries*, Armand Colin.

[HA] HALL (M.). *The Theory of Groups*, Mac Millan.

[HA WR] HARDY (G. H.) et WRIGHT (E. M.). *An Introduction to the Theory of Numbers*, Oxford University Press.

[H-C] HILBERT (D.) et COHN-VOSSEN (S.). *Geometry and the Imagination*, Chelsea.

[HD 1] HADAMARD (Jacques). *Leçons de géometrie élémentaire, tome I, 10e édition*, Armand Colin.

[HD 2] HADAMARD (Jacques). *Leçons de géometrie élémentaire, tome II, 7e édition*, Armand Colin.

[H-K] HAUPT (O.) et KÜNNETH (H.). *Geometrische Ordnungen*, Springer.

[H-L-P] HARDY (G. H.), LITTLEWOOD (J. E.) et POLYA (G.). *Inequalities*, Cambridge University Press.

[HM] HARTMAN (P.) *On Isometries and a Theorem of Liouville*, Mathematische Zeitschrift, 69, 1958, p. 202-210.

[HN] HELGASON (Sigurdur). *Differential Geometry and Symmetric Spaces*, Academic Press.

[HOL] d'HOLLANDER (Raymond). *Topologie Générale, tome I : Généralités, Mesure des angles et des distances*, Eyrolles.

[HO-PE] HODGE (W. V. D.) et PEDOE (D.). *Methods of Algebraic Geometry*, Cambridge University Press.

[H-P] HUGHES (Daniel R.) et PIPER (Fred C.). *Projective Planes*, Springer.

[HR] HADWIGER (H.). *Vorlesungen über Inhalt, Oberfläche und Isoperimetrie*, Springer.

[HS] HERSCH (Joseph). *Quatre propriétés des membranes sphériques homogènes*, C.R.A.S., 270, 1970, p. 1714-1716.

[HU] HUSEMOLLER (Dale). *Fibre Bundles*, McGraw Hill.

[H-W] HILTON (P. J.) et WYLIE (S.). *Homology Theory*, Cambridge University Press.

[H-Y] HOCKING (John G.) et YOUNG (Gail S.). *Topology*, Addison-Wesley.

[HZ] HURWITZ (M. A.). *Sur quelques applications géométriques des séries de Fourier*, Annales Ecole Norm., 19, 1902, p. 357-408.

[I-R] ILLIOVICI (G.) et ROBERT (P.). *Géométrie*, Eyrolles.

[JE] JOEDICKE (Jürgen). *Les structures en voiles et coques*, Vincent, Fréal et Cie.

[KE] KRÉE (P.). *Introduction aux mathématiques et à leurs applications fondamentales, M.P. 2*, Dunod.

[KF] KAZARINOFF (Nicholas D.). *Geometric Inequalities*, Random House.

[KG 1] KLINGENBERG (Wilhelm). *Eine Vorlesung über Differential Geometrie*, Springer.

[KG 2] KLINGENBERG (Wilhelm). *Paare symmetrischen und alternierenden Formen zweiten Grades*, Abhandl. Math. Sem. Hamburg, 19, 1955, p. 78-93.

[KH] KUROSH (A. G.). *Lectures in General Algebra*, Pergamon.

[KM] KLOTZ-MILNOR (Tilla). *Efimov's Theorem about Complete Immersed Surfaces of Negative Curvature*, Advances in Math., 8, 1972, p. 474-543.

[KN 1] KLEIN (Félix). *Lectures on the Icosahedron*, Dover.

[KN 2] KLEIN (Félix). *Vorlesungen über höhere Geometrie*, Springer.

[KO-NO 1] KOBAYASHI (Shoshichi) et NOMIZU (Katsumi). *Foundations of Differential Geometry, volume I*, Interscience.

[KO-NO 2] KOBAYASHI (Shoshichi) et NOMIZU (Katsumi). *Foundations of Differential Geometry, volume II*, Interscience.

[LB 1] LEBESGUE (Henri). *Leçons sur les constructions géométriques* Gauthier-Villars.

[LB 2] LEBESGUE (Henri). *Les coniques*, Gauthier-Villars.

[LB 3] LEBESGUE (Henri). *Octaèdres articulés de Bricard*, l'Enseignement mathématique, 13, 1967, p. 175-185.

[LE] LEKERKERKER (C. G.). *Geometry of numbers*, Walters-Noordhoff.

[LF 1] LELONG-FERRAND (Jacqueline). *Géométrie différentielle*, Masson.

[LF 2] LELONG-FERRAND (Jacqueline). *Transformations conformes et quasi-conformes des variétés riemanniennes compactes*, Mémoires Acad. Royale Belg., Cl. Sc. Mém. Coll. in-8°, 1971, fascicule 5.

[LF 3] LELONG-FERRAND (Jacqueline). *Invariants conformes globaux sur les variétés riemanniennes*, J. of Diff. Geometry, 8, 1973, p. 487-510.

[LF-AR] LELONG-FERRAND (J.) et ARNAUDIÈS (J. M.). *Cours de mathématiques, tome 3*, Dunod.

[LG 1] LANG (Serge). *Elliptic Functions*, Addison-Wesley.

[LG 2] LANG (Serge). *Analysis II*, Addison-Wesley.

[LM 1] LEMAIRE (J.). *Hypocycloïdes et Epicycloïdes*, Vuibert.

[LM 2] LEMAIRE (J.). *L'hyperbole équilatère*, Vuibert.

[LP] *Le libre du problème, volume 4 : la convexité*, CEDIC.

[LR 1] LEHNER (Joseph). *A Short Course in Automorphic Functions*, Holt, Rinehart and Winston.

[LR 2] LEHNER (Joseph). *Discontinuous Groups and Automorphic Functions*, Math. Surveys, number VIII, American Math. Society.

[LS] LEVALLOIS (Jean-Jacques). *Géodésie Générale, tome II : Géodésie classique bidimensionnelle*, Eyrolles.

[LU] LUSTERNIK (Lazar A.). *Convex Figures and Polyhedra*, Heath.

[LY] LEVY (Harry). *Projective and Related Geometry*, Mac Millan.

[LZ] LAZUTKIN (V. F.). *The Existence of Caustics for a Billiard Problem in a Convex Domain*, Math. USSR Izvestia, 7, 1973, p. 185-214.

[MA] MALLIAVIN (Paul). *Géométrie differentielle intrinseque*, Hermann.

[MD] MARCHAUD (A.). *Les surfaces du second ordre en géométrie finie*, J. Math. pures et appl., 9-15, 1936, p. 293-300.

[MI] MILNOR (John). *A problem in cartography*, American Math. Monthly, 76, 1969, p. 1101-1102.

[MJ] MANDELBROJT (Benoît). *Les Objets fractals*, Flammarion.

[ML] MICHEL (Charles). *Compléments de géométrie moderne*, Vuibert.

[M-P] MODENOV (P. S.) et PARKHOMENKO (A. S.). *Geometric Transformations, volume I*, Academic Press.

[MR] MATHER (J.). *The nice dimensions, Proceedings of Liverpool Singularities, Symposium I*, Lecture Notes in Mathematics n° 192, Springer.

[M-T] MARTINEAU (André) et TREVES (François). *Eléments de la théorie des espaces vectoriels topologiques et des distributions, fascicule I*, C.D.U.

[MW 1] MOSTOW (G. D.). *Strong Rigidity of Locally Symmetric Spaces*, Annals of Mathematical Studies, nº 78, Princeton University Press.

[MW 2] MOSTOW (G. D.). *Discrete Subgroups of Lie Groups*, Advances in Mathematics, 15, 1975, p. 112-123.

[NA] NEVANLINNA (Rolf). *On Differentiable Mappings, Analytic Functions*, p. 3-9, Princeton University Press.

[OA] OBATA (M.). *The Conjecture on Conformal Transformations of Riemannian Manifolds*, J. of Differential Geometry. 6, 1972, p. 247-258.

[OM] O'MEARA (O. T.). *Introduction to Quadratic Forms*, Springer.

[OS 1] OSSERMAN (Robert). *Bonnesen-style Isoperimetric Inequalities*, American Math. Monthly, 86, 1979, p. 1-29.

[OS 2] OSSERMAN (Robert). *The isoperimetric inequality*, Bull. Amer. Math. Soc., 84, 1978, p. 1182-1238.

[PA] PALAIS (Richard). *The Classification of G-Spaces*, Memoirs of the A.M.S., nº 36.

[PC] PASCAL (Blaise). *Pensées*, édition Brunschwig.

[PE] PEDOE (D.). *A Course of Geometry*, Cambridge University Press.

[PL] POHL (William F.). *A Theorem of Géométrie finie*, Journal of Differential Geometry, 10, 1975, p. 435-466.

[PN] PAYNE (L. E.). *Isomerimetric Inequalities and their Applications*, SIAM Review, 9, 1967, p. 453-488.

[PO] PORTEOUS (I. R.). *Topological Geometry*, Van Nostrand-Reinhold.

[PR] PORTER (T. I.). *A History of the Classical Isoperimetric Problem, Contributions to the Calculus of Variations*, University of Chicago Press, 1933.

[P-S] POLYA (G.) et SZEGÖ (G.). *Isoperimetric Inequalities in Mathematical Physics*, Princeton University Press ou Kraus Reprint Corporation.

[PT] PICKERT (G.). *Projektive Ebenen*, Springer.

[PV 1] POGORELOV (A. V.). *Extrinsic Geometry of Convex Surfaces*, Israël Programm for Scientific Translation, Jerusalem.

[PV 2] POGORELOV (A. D.). *Complete Solution of Hilbert's Fourth Problem*, Soviet Math. Doklady, 14, 1973, p. 46-49.

[RA] RADEMACHER (Hans). *Topics in Analytic Number Theory*, Grundlehren nº 169, Springer.

[R-C 1] ROUCHE (Eugène) et de COMBEROUSSE (Charles). *Traité de Géométrie, 1re partie*, Gauthier-Villars.

[R-C 2] ROUCHE (Eugène) et de COMBEROUSSE (Charles). *Traité de Géométrie, 2e partie*, Gauthier-Villars.

[RE] ROUSSARIE (Robert). *Sur les feuilletages de variétés de dimension* 3, Annales de l'Institut Fourier, 21(3), 1971, p. 13-81.

[RM] DE RHAM (Georges). *Sur les polygones générateurs des groupes fuchsiens*, l'Enseignement mathématique, 17, 1971, p. 49-61.

[RN 1] ROBINSON (Raphael M.), *Undecidability and Nonperiodicity for Tilings of the Plane*, Inventiones Math., 12, 1971, p. 177-209.

[RN 2] ROBINSON (Raphael M.). *Undecidable Tiling Problems in the Hyperbolic Plane*, Inventiones Math., 44, 1978, p. 259-264.

[RN 3] ROBINSON (Raphael M.). *Comments on the Penrose Tiles*, preprint, University of California, Berkeley.

[RO] ROMANOV (V. G.). *Integral Geometry and Inverse Problems for Hyperbolic Equations*, Springer.

[RS] ROGERS (C. A.). *Packing and Covering*, Cambridge University Press.

[R-V] ROBERTS (A. Wayne) et VARBERG (Dale E.). *Convex Functions*, Academic Press.

[SA] SHIMURA (G.). *Introduction to the Arithmetic Theory of Automorphic Functions*, Iwanami Shoten et Princeton University Press.

[SB] STERNBERG (Shlomo). *Lectures on Differential Geometry*, Prentice-Hall.

[SC 1] SCHATTSCHNEIDER (Doris). *The plane symmetry groups : their recognition and notation*, American Math. Monthly, 85, 1978, p. 439-450.

[SC 2] SCHATTSCHNEIDER (Doris). *Tiling the plane with congruent pentagons*, Mathematics Magazine, 51 (1978), p. 29-44.

[SD 1] STAUDE (Otto). *Fadenconstructionen des Ellipsoides*, Math. Annalen, 20, 1882, p. 147-184.

[SD 2] STAUDE (Otto). *Die Fokaleigenschaften der Flächen Zweiter Ordnung*, Leipzig, 1896.

[SE 1] SERRE (Jean-Pierre). *Corps locaux*, Hermann.

[SE 2] SERRE (Jean-Pierre). *Cours d'arithmétique*, Presses Universitaires de France.

[SE 3] SERRE (Jean-Pierre). *Algèbres de Lie semi-simples complexes*, W. A. Benjamin.

[SE-TH] SEIFERT (H.) et THRELFALL (W.). *Lehrbuch der Topologie*, Chelsea.

[SF 1] SCHWERDTFEGER (Hans). *Invariants of a class of transformation groups*, Aequationes Math., 14, 1976, p. 105-110.

[SF 2] SCHWERDTFEGER (Hans). *Invariants à cinq points dans le plan projectif*, C.R.A.S., 285, 1977, p. 127-128.

[SG] SEIDENBERG (A.). *Lectures in Projective Geometry*, Van Nostrand.

[SGR] *Séminaire de Géométrie Riemannienne de l'Université Paris VII*, 1970-1971.

[SK] SPIVAK (Michael). *Differential Geometry, volume II*, Michael Spivak.

[SL 1] SALLEE (G. T.). *Maximal areas of Reuleaux polygons*, Canadian Math. Bull., 13, 1970, p. 175-179.

[SL 2] SALLEE (G. T.). *Reuleaux polytopes*, Mathematika, 17, 1970. p. 315-323.

[SN] STEIN (S. K.). *Tiling Space by Congruent Polyhedra*, Bulletin of the A.M.S., 80, 1974, p. 819-820.

[SO] SANTALO (L. A.). *Introduction to Integral Geometry*, Hermann.

[SR] SPANIER (E.). *Algebraic Topology*, McGraw Hill.

[S-T] SNAPPER (Ernst) et TROYER (Robert J.). *Metric Affine Geometry*, Academic Press.

[STE] STEFFEN (Klaus). *A symmetric flexible Connelly sphere with only nine vertices*, preprint, I.H.E.S., Bures-sur-Yvette.

[ST-RA] STEINITZ (E.) et RADEMACHER (H.). *Vorlesungen über die Theorie der Polyeder*, Springer.

[SU] SAMUEL (Pierre). *Unique Factorization*, American Math. Monthly, 75, 1968, p. 945-952.

[SW] STEWART (Ian). *Galois Theory*, Chapman and Hall.

[TG] *Seminar on Transformation Groups*, by Armand BOREL, Annals of Mathematical Studies, nº 46, Princeton.

[TM] THOM (René). *Sur la théorie des enveloppes*, J. de Math. pures et appl., 16, 1962, p. 177-192.

[TS] TITS (Jacques). *Buildings of spherical type and finite BN-pairs*, Springer Lecture Notes in Mathematics, nº 386.

[VE] VALENTINE (Frederik A.). *Convex Sets*, McGraw Hill.

[VG 1] VODERBERG (H.). *Zur Zerlegung eines ebenen Bereiches in kongruente Bereiche in Form einer Spirale*, Jber. dtsch. Math. Ver., 46, 1936, p. 229-231.

[VG 2] VODERBERG (H.). *Zur Zerlegung eines ebenen Bereiches in kongruente Bereiche in Form einer Spirale*, Jber. dtsch. Math. Ver., 46, 1937, p. 159-160.

[VL] DU VAL (Patrick). *Homographies, Quaternions and Rotations*, Oxford University Press.

[VN] VALIRON (Georges). *Equations fonctionnelles. Applications*, Masson.

[V-Y] VEBLEN (O.) et YOUNG (J. W.). *Projective Geometry*, deux volumes, Ginn and Co.

[WF] [illegible] A. Wolf.

[WK] [illegible]

[WL] [illegible] ess.

[WN] [illegible] nbridge
[illegible]

[WO] [illegible] *Space,*
C [illegible] *Hurwitz*
M [illegible]

[WR] [illegible] *lds and*
Li [illegible]

[Y-B] **Y** [illegible] *igures,*
H [illegible]

[ZN] **ZI** [illegible] mand
Co [illegible]

[ZR] **ZV** [illegible] *s and*
the [illegible]